



## Исследование поля и энергии в слабопроводящем оптоволокне со степенным профилем показателя преломления произвольной степени

В. А. Гладких, В. Д. Власенко

*Вычислительный центр Дальневосточного отделения  
Российской академии наук (г. Хабаровск, Российская Федерация)*

[vlasenko@as.khb.ru](mailto:vlasenko@as.khb.ru)

### Аннотация

*Введение.* Рассмотрен слабопроводящий градиентный световод в одномодовом режиме, решено уравнение для электрического поля в сердцевине такого световода в общем виде в первом приближении. Целью работы является исследование поля и энергии в сердцевине слабопроводящего градиентного световода без учета поляризации в одномодовом режиме в случае степенного (в общем виде) профиля показателя преломления.

*Материалы и методы.* Из уравнений Максвелла для диэлектрических сред выведено уравнение для поля в световоде с градиентным профилем показателя преломления. Производя соответствующие подстановки, заменяя функцию Бесселя нулевого порядка на гауссову функцию и делая необходимое приближение полученного уравнения, приходим к уравнению, которое решаем методом Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна, и получаем аналитические выражения для поля и энергии внутри волновода для произвольной степени показателя преломления.

*Результаты исследования.* Получено решение уравнения для поля в световоде со степенным профилем показателя преломления. Проведены численные расчеты. Построен график зависимости безразмерной величины – «нормированной» энергии – от волноводного параметра для первых пяти степеней профиля ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

*Обсуждение и заключение.* Показано, что быстрее растет энергия для профиля с  $n = 1$ , а после этого значения с резким отрывом растет энергия для профиля с  $n = 1$ , а для  $n > 1$  рост энергии уменьшается с увеличением  $n$ . Полученные в работе результаты могут быть применены при создании энергетически выгодной сердцевины и для возможного анализа передачи информации, а также для конструирования волноводов с учетом конкретных приложений.

**Ключевые слова:** слабопроводящий градиентный световод, одномодовый режим, степенной профиль показателя преломления, уравнения Максвелла, метод ВКБ, нормированная энергия

**Благодарности:** авторы выражают признательность анонимным рецензентам.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Гладких В. А., Власенко В. Д. Исследование поля и энергии в слабопроводящем оптоволокне со степенным профилем показателя преломления произвольной степени // Инженерные технологии и системы. 2022. Т. 32, № 4. С. 588–599. doi: <https://doi.org/10.15507/2658-4123.032.202204.588-599>

© Гладких В. А., Власенко В. Д., 2022




Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License.  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

# Investigation of Field and Energy in a Weakly-Conducting Optical Fiber with an Arbitrary Degree of Refractive Index Profile

V. A. Gladkikh, V. D. Vlasenko 

Computer Center of the Far Eastern Branch

of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk, Russian Federation)

 vlasenko@as.khb.ru

## Abstract

**Introduction.** We consider a weakly conductive gradient fiber in the single-mode regime and solve the equation for the electric field in the core of this fiber in a general form in the first approximation. The aim of this study is to study the field and energy in the core of a weakly conductive gradient fiber without taking into account the polarization in the single-mode regime in the case of a power-law (generally) refractive index profile.

**Materials and Methods.** From Maxwell's equations for dielectric media, there was derived an equation for the field in a fiber with gradient refractive index profile. Making the appropriate substitutions, replacing the zero-order Bessel function with a Gaussian function, and making the necessary approximation of the resulting equation, we arrive at an equation that we solve by the Wentzel – Kramers – Brillouin method and obtain analytical expressions for the field and energy inside waveguide for an arbitrary degree of the refractive index.

**Results.** There was obtained a solution of the equation for the field in fiber with a power-law refractive index profile. Numerical calculations were carried out. A graph of the dependence of a dimensionless quantity – “normalized” energy – on the waveguide parameter for the first five powers of the profile ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ) was plotted.

**Discussion and Conclusion.** It is shown that the energy increases faster for the profile with  $n = 1$ , and after this value, the energy for the profile with  $n = 1$  increases sharply, and for  $n > 1$ , the energy growth decreases with increasing  $n$ . The results obtained in this work can be used for creating an energy-efficient core, for carrying out a possible analysis of information transmission, and for designing waveguides taking into account specific applications.

**Keywords:** weakly conductive gradient fiber, single-mode regime, power-law refractive index profile, Maxwell equations, WKB method, normalized energy

**Acknowledgements:** The authors express their gratitude to the anonymous reviewers.

**Conflict of interest:** The authors declare no conflict of interest.

**For citation:** Gladkikh V.A., Vlasenko V.D. Investigation of Field and Energy in a Weakly-Conducting Optical Fiber with an Arbitrary Degree of Refractive Index Profile. *Engineering Technologies and Systems*. 2022;32(4):588–599. doi: <https://doi.org/10.15507/2658-4123.032.202204.588-599>

## Введение

В качестве оптических волокон применяются диэлектрики со ступенчатым или градиентным профилем показателя преломления. Ведутся интенсивные экспериментальные исследования по поиску оптимальных материалов волокон для тех или иных целей. Аналитически

исследованы волноводы для волокон со ступенчатым профилем показателя преломления. С градиентным профилем показателя преломления аналитика осложняется в связи с трудностями при решении достаточно сложных уравнений, возникающих из-за пространственной зависимости профиля

показателя преломления. Эксперименты показали, что хорошей моделью для математического исследования физических процессов с градиентным профилем может служить модель степенного профиля показателя преломления. Самое известное точное решение связано с неограниченным параболическим профилем показателя преломления. В связи со сложностями при получении точного решения для других случаев градиентных профилей разрабатываются разнообразные приближенные методы решения таких уравнений.

Целью настоящей работы является приближенное решение для поля в сердцевине слабопроводящего градиентного световода (в одномодовом режиме) в случае степенного (в общем виде) профиля показателя преломления и исследование зависимости энергии поля в сердцевине волновода от волнового параметра.

### Обзор литературы

В науке и технике давно используются оптические волокна (световоды), по которым могут распространяться оптические лучи. Достаточно полные и общие сведения о световодах и диэлектрических волноводах содержатся в фундаментальной монографии А. Снайдера и Дж. Лава, где широко представлена информация о различных видах волноводов с кратким описанием экспериментальных и теоретических результатов с большим количеством примеров и различных математических методов<sup>1</sup>. Однако со времени издания этого труда прошло немало времени, и исследования по этой тематике значительно продвинулись. Кратко отметим их направления.

Предложено устойчивое к изгибам одномодовое волокно с большой площадью моды и низкими потерями на изгибе [1]; дан анализ многожильного

маломодового волокна с составным профилем показателя преломления и двойной вспомогательной структурой [2]; смоделирована и вычислена уникальная трехмерная прерывистая конечно-элементная модель Петрова – Галеркина для моделирования лазерного усиления в волоконном усилителе [3]; предложены оптоволоконные датчики, основанные на френелевском отражении на конце волокна [4]. Усовершенствован и модифицирован метод расширенной тангенс-функции (применяется для получения оптических солитонов для двухъядерных ответвителей кубической четверти (CQ) в оптических метаматериалах, имеющих секстический степенной закон Кудряшова с произвольным показателем преломления) [5]; рассмотрены ребристые волноводы, в которых направляющий слой в основном состоит из пластины с наложенной на нее одной или несколькими полосами [6]; исследованы сегментированные волноводы (такие волноводы могут периодически изменять свое поперечное сечение, обеспечивая передачу света без потерь через так называемые блоховские моды) [7].

Заслуживает внимание работа, где впервые были предложены перспективные микроструктурированные или дырчатые волоконные световоды из кварцевого стекла. В оболочке таких световодов делаются продольные отверстия, расположенные в поперечном сечении относительно друг друга в том или ином порядке [8]. Большой контраст показателя преломления сердцевины и оболочки определяет уникальные оптические свойства таких волноводов. В частности, варьируя геометрию оболочки, можно управлять дисперсионными свойствами световода. Математический аппарат для анализа таких световодов можно найти в других

<sup>1</sup> Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.

статьях [9–11]. Возможность управления показателем преломления оболочки в таких волноводах позволяет создавать одномодовое оптоволокно. В нем на любой длине волны распространяется только одна мода (еще одна особенность таких волноводов – существование одномодового режима в волокнах с большим диаметром сердцевины). Различные аспекты этого направления хорошо представлены [12–15].

Что касается классических градиентных световодов, то на сегодняшний день получено точное решение для поля в волокне только в случае неограниченного параболического профиля: обобщенные полиномы Лагерра в цилиндрических координатах или функции Гаусса – Эрмита в декартовых. Подробный анализ этого решения можно найти в классической литературе<sup>2</sup>. Для произвольного градиентного планарного волновода получены модовые решения уравнения Гельмгольца – амплитуда моды представлена в виде экспоненты с показателем в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого находятся из рекуррентных соотношений [16]. С помощью моделирования показано, что градиентные микролинзы Микаэляна и «рыбий глаз» Максвелла могут формировать изображения со сверхразрешением.

Представлен новый подход к разработке структурированных оптических волокон. Показано, что при внутреннем наноструктурировании сердцевины, состоящей из двух стекол, могут быть созданы волокна с эффективным профилем градиента показателя преломления с заданным распределением показателя преломления [17].

В случае трехмерного градиентного световода с круглым поперечным сечением ранее нами получено в первом

приближении аналитическое выражение для поля и энергии в одномодовом режиме внутри слабопроводящего волокна со степенным профилем показателя преломления с произвольной степенью (с учетом поляризации) путем решения уравнения Гельмгольца методом функции Грина. Построены зависимости энергии от волноводного параметра для второй и третьей степени профиля показателя преломления выражения. Показано, что в рассматриваемом приближении энергия увеличивается с ростом волноводного параметра до определенного значения параметра, после которого зависимости энергии от волноводного параметра меняются местами для второй и третьей степени [18].

В настоящей работе другими методами, отличными от примененных в статье [18], мы определим поле и энергию в одномодовом режиме внутри слабопроводящего волокна со степенным профилем показателя преломления с произвольной степенью без учета поляризации (что упрощает вычисления), построим соответствующие зависимости энергии и результаты сопоставим с результатами предыдущей работы [18]. Тем самым мы полностью решим задачу без учета поляризации и с учетом поляризации. Результаты данной и предыдущей [18] работ могут быть использованы для конструирования световодов в зависимости от конкретных приложений (в частности, построенные зависимости энергии от волноводного числа могут помочь подобрать материал сердцевины световода с подходящей степенной зависимостью профиля показателя преломления).

### **Материалы и методы**

Выведем уравнение для поля в световоде с градиентным профилем показателя преломления. Пусть

<sup>2</sup> Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. Пер. с англ. М. : Мир, 1984. 512 с. ; Семенов Н. А. Оптические кабели связи: теория и расчет. М. : Радио и связь, 1981. 152 с.

$\{\vec{e}(t, R), \vec{h}(t, R)\}$  – соответственно электрическая и магнитная составляющие электромагнитного поля ( $t$  – время,  $R = (x, y, z)$  – координаты). Из уравнений Максвелла для диэлектрических сред с показателем преломления  $n^2(R)$ , отделяя временную часть, в результате преобразований для электрической компоненты электромагнитного поля (для магнитной компоненты аналогично) получим:

$$\vec{e}(t, R) = \vec{E}(R) \exp(-i\omega t) \rightarrow \Delta \vec{E} + k^2 n^2 \vec{E} = -\nabla(\vec{E}, \nabla[\ln(n^2)]), \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света,  $\omega$  – циклическая частота,  $k = \omega / c$ . Для волокна (сердцевины) градиентного световода  $n^2 = n^2(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , поле в волокне также зависит от  $r$  и распространяется вдоль оси  $z$ . Для поля  $\vec{E}$  запишем ( $\vec{n}_z, \beta, \varphi$  – соответственно единичный вектор направления распространения поля вдоль оси  $z$ , постоянная распространения и угол в плоскости  $(x, y)$ )

$$\vec{E}(R) = \vec{n}_z \exp(i\beta z) \exp(im\varphi) E(r). \quad (2)$$

Случай с ненулевой правой частью в (2) в первом приближении рассмотрен нами в другой работе [18]. Отбрасывая в (1) правую часть (не рассматривая поляризационные свойства, описываемые членами, содержащими  $\nabla\{\ln n^2\}$ ), от (1), (2) перейдем к скалярному уравнению в полярных координатах для основной моды ( $m = 0$ ):

$$\frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE(r)}{dr} + \{k^2 n^2(r) - \beta^2\} E(r) = 0. \quad (3)$$

Показатель преломления для волновода обычно записывается в следующем виде:

$$n^2(r) = \begin{cases} n_{co}^2 [1 - 2\Delta h(r)], & 0 \leq r \leq \rho, \\ n_{cl}^2, & r > \rho, \end{cases} \\ 2\Delta = \frac{n_{co}^2 - n_{cl}^2}{n_{co}^2}, \quad h(0) \equiv 0, \quad h(\rho) \equiv 1, \quad (4)$$

где  $h(r)$  – возрастающая от 0 до 1 функция при изменении  $r$  от 0 до  $\rho$ ;  $n_{co}^2, n_{cl}^2$  – показатели преломления волокна и оболочки;  $\Delta$  – высота профиля;  $\rho$  – радиус круглого в поперечнике волокна.

Подставляя (4) в (3), запишем результат в виде (перейдем к безразмерной переменной  $\gamma$ )

$$\frac{d^2 E(\gamma)}{d\gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{dE(\gamma)}{d\gamma} + (\chi_1 \rho)^2 E(\gamma) = V^2 h(\gamma) E(\gamma); \\ \gamma \equiv r/\rho, \quad \chi_1^2 \equiv k^2 n_{co}^2 - \beta^2, \\ V \equiv k\rho NA, \quad NA \equiv \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2}, \quad (5)$$

здесь  $V, NA$  – волноводный параметр и числовая апертура.

При этом (4) принимает вид

$$n^2(\gamma) = \begin{cases} n_{co}^2 [1 - 2\Delta h(\gamma)], & 0 \leq \gamma \leq 1, \\ n_{cl}^2, & \gamma > 1, \end{cases} \\ 2\Delta = \frac{n_{co}^2 - n_{cl}^2}{n_{co}^2}, \quad h(0) \equiv 0, \quad h(1) \equiv 1. \quad (6)$$

### Результаты исследования

Найдем решение уравнения для поля в световоде с градиентным профилем показателя преломления.

Поскольку

$$\frac{d^2 E_0(\gamma)}{d\gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{dE_0(\gamma)}{d\gamma} + (\chi_1 \rho)^2 E_0(\gamma) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow E_0(\gamma) = J_0(\chi_1 \rho \gamma), \quad (7)$$

то решение уравнения (5) будем искать в виде

$$E(\gamma) \equiv f(\gamma)E_0(\gamma). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), с учетом (7) для неизвестной функции  $f(\gamma)$  получим уравнение

$$f''(\gamma) + \left( \frac{1}{\gamma} + 2 \frac{E_0'(\gamma)}{E_0(\gamma)} \right) f'(\gamma) - V^2 h(\gamma) f(\gamma) = 0, \quad \left( f'(\gamma) \equiv \frac{df(\gamma)}{d\gamma} \right). \quad (9)$$

Заменяем здесь функцию Бесселя  $E_0(\gamma) = J_0(\chi, \rho\gamma)$ , описывающую одно-модовый режим волновода со ступенчатым профилем, на гауссову функцию ( $r_0$  – радиус модового пятна):

$$E_0(\gamma) = J_0(\chi, \rho\gamma) \rightarrow E_0(\gamma) = \exp\{-\alpha\gamma^2/2\}, \\ \alpha \equiv \rho^2/r_0^2, \quad (10)$$

причем (см. [18–22]):

$$r_0 \cong \frac{0,4\lambda}{NA} \rightarrow \alpha \equiv \frac{\rho^2}{r_0^2} \cong 0,16V^2; \\ V \in (0; 2,405) \\ \left( NA = \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2}, \right. \\ \left. V = k\rho NA, k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right), \quad (11)$$

обоснование применения этой формулы для нашего случая, полученной для волновода со ступенчатым профилем показателя преломления, показано в другой работе [21]. Подставляя (10) в (9), запишем уравнение в виде

$$f''(\gamma) + \left( \frac{1}{\gamma} - 2\alpha\gamma \right) f'(\gamma) - V^2 h(\gamma) f(\gamma) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим коэффициент при первой производной и выясним, при каких значениях  $\gamma$  он обращается в нуль (воспользуемся (11)):

$$\frac{1}{\gamma} - 2\alpha\gamma = 0 \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = \\ = \frac{1}{V\sqrt{0,32}} \in \{V \in (0; 2,4)\} \in (0,74; 3,54),$$

откуда

$$\frac{1}{\gamma} > 2\alpha\gamma \rightarrow \gamma < 0,74, \quad \frac{1}{\gamma} < 2\alpha\gamma \rightarrow \gamma > 3,54. \quad (13)$$

Выбирая первый вариант для поля внутри сердцевины волновода, перепишем (12) в упрощенном виде

$$f''(\gamma) + \frac{1}{\gamma} f'(\gamma) - V^2 h(\gamma) f(\gamma) = 0, \\ (\gamma < 0,74). \quad (14)$$

Решать уравнение будем аналогично методу ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна)<sup>3</sup> (современное изложение в [23]).

Итак, искомую функцию запишем в виде

$$f(\gamma) \equiv \exp\{p(\gamma)\} \rightarrow \\ \rightarrow f'(\gamma) = p'(\gamma) f(\gamma), \quad (15)$$

$$f''(\gamma) = p''(\gamma) f(\gamma) + (p'(\gamma))^2 f(\gamma).$$

Подставляя в (14), получаем уравнение для функции  $p(\gamma)$

$$p''(\gamma) + \{p'(\gamma)\}^2 + \\ + \frac{1}{\gamma} p'(\gamma) - V^2 h(\gamma) = 0. \quad (16)$$

<sup>3</sup> Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Квантовая механика (Нерелятивистская теория). 4-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 768 с.

Предположим малость второй производной  $p''(\gamma)$ :

$$|p''(\gamma)| \ll |-V^2 h(\gamma)| = V^2 h(\gamma). \quad (17)$$

Тогда для (16) мы можем записать

$$\begin{aligned} p'(\gamma) &\equiv y(\gamma) \rightarrow y^2(\gamma) + \frac{1}{\gamma} y(\gamma) - V^2 h(\gamma) \rightarrow \\ &\rightarrow \{p'(\gamma)\}_{1,2} = \{y(\gamma)\}_{1,2} = \\ &= -\frac{1}{2\gamma} \pm \frac{1}{2\gamma} \sqrt{1 + 4V^2 h(\gamma)\gamma^2} \rightarrow \{p(\gamma)\}_{1,2} = \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \pm \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1 + 4V^2 h(\gamma)\gamma^2}}{\gamma} d\gamma, \quad (18) \end{aligned}$$

и согласно (8), (10) и (15) получим для поля

$$\begin{aligned} E(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left\{\pm \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1 + 4V^2 h(\gamma)\gamma^2}}{\gamma} d\gamma\right\} \times \\ &\times \exp\{-\alpha\gamma^2/2\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Поскольку в случае ступенчатого волновода  $h(\gamma) = 0$  ( $\gamma \in (0, 1)$ ), то выбираем знак плюс – в этом случае (19) сводится к выражению (10).

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} E(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left\{\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1 + 4V^2 h(\gamma)\gamma^2}}{\gamma} d\gamma\right\} \times \\ &\times \exp\{-\alpha\gamma^2/2\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Подчеркнем, что при  $\gamma \rightarrow 0$  поле не обращается в нуль, согласно предыдущему выражению.

Дифференцируя  $p'(\gamma)$  из (18), условие (17) запишем в виде

$$\left|1 + \frac{2[2V^2 h'(\gamma)\gamma^3 - 1]}{\sqrt{1 + 4V^2 h(\gamma)\gamma^2}}\right| \ll 2V^2 h(\gamma)\gamma^2. \quad (21)$$

Формулы (20), (21) получены для произвольной функции  $h(\gamma)$ , удовлетворяющей требованиям из (6).

Полагая выполненным неравенство (21), для поля в случае степенного профиля показателя преломления запишем функцию  $h(\gamma)$  вместе с выражением для поля (20):

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \gamma^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \rightarrow \\ \rightarrow E(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left\{\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1 + 4V^2 \gamma^{n+2}}}{\gamma} d\gamma\right\} \times \\ &\times \exp\{-\alpha\gamma^2/2\}. \end{aligned}$$

С помощью вспомогательного интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + ax^m}}{x} dx &= \\ &= \frac{2}{m} \sqrt{1 + ax^m} + \ln\left\{\frac{\sqrt{1 + ax^m} - 1}{\sqrt{1 + ax^m} + 1}\right\}^{1/m}, \quad (22) \end{aligned}$$

предыдущее выражение для поля, в случае степенного профиля показателя преломления, принимает окончательный вид (в (22)  $a = 4V^2$ ,  $m = n + 2$ ):

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \gamma^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \rightarrow \\ \rightarrow E_n(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left\{\frac{\sqrt{1 + 4V^2 \gamma^{n+2}} - 1}{\sqrt{1 + 4V^2 \gamma^{n+2}} + 1}\right\}^{1/4n} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{1}{n+2} \sqrt{1 + 4V^2 \gamma^{n+2}}\right\} \times \\ &\times \exp\{-\pm\gamma^2/2\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Наконец, для безразмерной нормированной энергии  $W_{norm(n)}(V)$  (отношение энергии поля (23)  $W_{gr(n)}(V) \equiv \int_0^1 E_n^2(\gamma)\gamma d\gamma$  к энергии поля (10)

для ступенчатого профиля  $W_{st}(V) \equiv \int_0^1 E_0^2(\gamma) \gamma d\gamma = \int_0^1 \exp(-\alpha\gamma^2) \gamma d\gamma$  в одномодовом режиме) находим (несмотря на выбранный вариант в (13), не снижая общности, интегрируем по  $\gamma$  от нуля до единицы) ( $V \in (0,5; 2,4)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ )

$$W_{norm(n)}(V) \equiv \frac{W_{gr(n)}(V)}{W_{st}(V)} = \left[ \int_0^1 \exp(-\alpha\gamma^2) \gamma d\gamma = \frac{1}{2\alpha} [1 - \exp(-\alpha)] \right] = \frac{0,32V^2}{1 - \exp(-0,16V^2)} \left\{ \int_0^1 \left( \frac{\sqrt{1+4V^2x^{n+2}} - 1}{\sqrt{1+4V^2x^{n+2}} + 1} \right)^{1/2n} \times \exp\left(\frac{2}{n+2} \sqrt{1+4V^2x^{n+2}}\right) \cdot \exp(-0,16V^2x^2) dx \right\}.$$

На рисунке для слабопроводящего оптоволокна с градиентным профилем показателя преломления, без учета поляризации в одномодовом режиме в случае степенного профиля показателя преломления при  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , построены зависимости «нормированной» энергии  $W_{norm(n)}$  от волноводного параметра. Показано, что до значения  $V_c \sim 0,9$  быстрее растет энергия для профиля с  $n = 1$  (но в точке  $V_c \sim 0,9$  для всех рассмотренных степеней энергия совпадает), а после этого значения с резким отрывом растет энергия для профиля с  $n = 1$ , а для  $n > 1$  рост энергии уменьшается с увеличением  $n$ .

Если сравнить результаты с данными нашей предыдущей работы [18], посвященной анализу поля и энергии слабопроводящего оптоволокна, с учетом поляризации в одномодовом режиме в случае степенного профиля показателя преломления, рассмотренного для случаев  $n = 2, 3$ , то учет поляризации

сводится к смещению точки  $V_c$  от значения 0,9 до значения 1,55.

### Обсуждение и заключение

Как видно из рисунка, при изменении параметра  $V$  от значения 0,5 до 2,405, согласно формуле (11), нормированная энергия  $W_{norm}$  растет от 1 до  $W_{norm(max)} \approx 7,5$  для профиля с  $n=1$ , до  $W_{norm(min)} \approx 2$  для профиля с  $n = 5$ . Для всех рассмотренных профилей значения соответствующих энергий превышают энергии ступенчатого профиля для соответствующих значений параметра  $V$ . Исключая мало применяемый профиль с  $n=1$ , видим, что наиболее энергоэффективным из всех степенных профилей оказывается профиль с  $n = 1$ , что подтверждается экспериментальными данными<sup>4</sup>.

Поскольку согласно формуле (5)

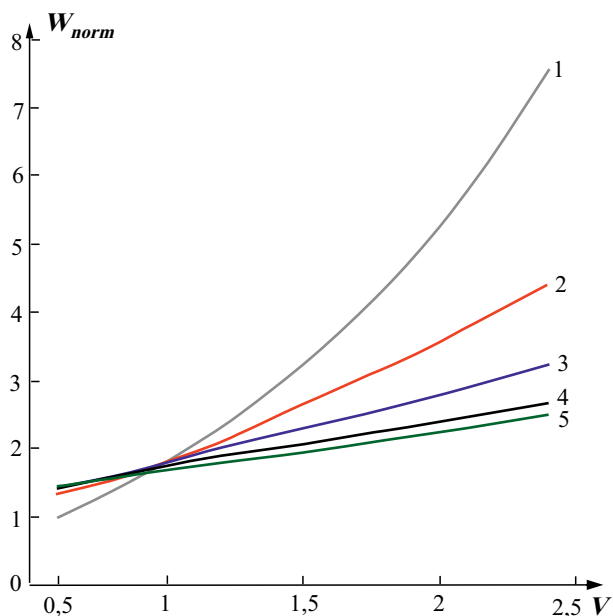
$$V = k\rho NA = \left\{ k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, NA = \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \right\} = 2\pi \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2},$$

и энергоэффективность возрастает с ростом параметра  $V$ , то при постоянной численной апертуре  $NA$  в рассматриваемом слабонаправляющем случае ( $NA \ll 1$  – малая разность между показателем преломления в сердцевине волокна и показателем преломления оболочки) параметр  $V$  можно повышать либо уменьшением длины волны, либо увеличением радиуса сердцевины.

Данная работа посвящена исследованию зависимости поля и энергии в градиентных волокнах со степенным профилем показателя преломления. Результаты получены в общем виде для произвольной степени показателя преломления и проиллюстрированы для выбранных степеней (в предыдущей

<sup>4</sup> Семенов Н. А. Оптические кабели связи: теория и расчет.





Р и с. Зависимость нормированной энергии  $W_{norm}$  от волноводного параметра  $V$  для профиля показателя преломления  $n$ : 1 – профиль  $n = 1$ ; 2 – профиль  $n = 2$ ; 3 – профиль  $n = 3$ ; 4 – профиль  $n = 4$ ; 5 – профиль  $n = 5$

Fig. Dependence of the normalized energy  $W_{norm}$  on the waveguide parameter  $V$  for the refractive index profile  $n$ : 1 – profile  $n = 1$ ; 2 – profile  $n = 2$ ; 3 – profile  $n = 3$ ; 4 – profile  $n = 4$ ; 5 – profile  $n = 5$

работе [18] для случаев  $n = 2, 3$ , а в настоящей для  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ). При этом аналитические расчеты были проведены разными методами. Показано, что учет поляризации сводится к смещению точки пересечения  $V_c$  от значения

0,9 до значения 1,55. Полученные результаты, с учетом конкретных приложений, могут быть применены при конструировании энергетически выгодного профиля сердцевины волокна и для анализа передачи информации.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Tong Y., Chen S., Tian H. A Bend-Resistant Low Bending Loss and Large Mode Area Two-Layer Core Single-Mode Fiber with Gradient Refractive Index Ring and Multi-Trench // Optical Fiber Technology. 2018. Vol. 45. P. 235–243. doi: <https://doi.org/10.1016/j.yofte.2018.07.010>
2. A Low Crosstalk Multi-Core Few-Mode Fiber with Composite Refractive Index Profile and Air-Hole Embedded Trench Assistance [Электронный ресурс] / G. Wang [et al.] // Optics Communications. 2019. Vol. 499. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127258>
3. Hennekinga S., Grosekb J., Demkowicza L. Model and Computational Advancements to Full Vectorial Maxwell Model for Studying Fiber Amplifiers // Computers & Mathematics with Applications. 2021. Vol. 85, Issue 1. P. 30–41. doi: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.01.006>
4. Numerical and Experimental Study of a Multimode Optical Fiber Sensor Based on Fresnel Reflection at the Fiber Tip for Refractive Index Measurement [Электронный ресурс] / A. Brientin [et al.] // Optics & Laser Technology. 2021. Vol. 143. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.107315>
5. Cubic–Quartic Solitons in Twin-Core Couplers with Optical Metamaterials Having Kudryashov’s Sextic Power Law of Arbitrary Refractive Index by Using Improved Modified Extended Tanh-Function

Method [Электронный ресурс] / Н. А. Eldidamony [et al.] // Optik. 2022. Vol. 265. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169498>

6. Single-Mode Porous Silicon Waveguide Interferometers with Unity Confinement Factors for Ultra-Sensitive Surface Adlayer Sensing / T. H. Talukdar [et al.] // Optics Express. 2019. Vol. 23, Issue 16. P. 22485–22498. doi: <https://doi.org/10.1364/OE.27.022485>

7. Segmented Waveguides in Thin Silicon-On-Insulator / M. Hochberg [et al.] // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. 2005. Vol. 22, Issue 7. P. 1493–1497. doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.22.001493>

8. All-Silica Single-Mode Optical Fiber with Photonic Crystal Cladding / J. C. Knight [et al.] // Optics Letters. 1997. Vol. 21, Issue 19. P. 1547–1549. doi: <https://doi.org/10.1364/OL.21.001547>

9. Multipole Method for Microstructured Optical Fibers. I. Formulation / T. P. White [et al.] // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. 2002. Vol. 19, Issue 10. P. 2322–2330. doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.19.002322>

10. Multipole Method for Microstructured Optical Fibers. II. Implementation and Results / B. T. Kuhlmey [et al.] // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. 2002. Vol. 19, Issue 10. P. 2331–2340. doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.19.002331>

11. Гапонов Д. А., Бирюков А. С. Эффективный метод анализа оптических свойств микро-структурированных волоконных световодов // Фотон-экспресс. 2005. № 6. С. 77–104. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20211611> (дата обращения: 20.06.2022).

12. Ultimate Low Loss of Hollow-Core Photonic Crystal Fibers / P. J. Roberts [et al.] // Optics Express. 2005. Vol. 13, Issue 1. P. 236–244. doi: <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.000236>

13. Dudley J. M., Genty G., Coen S. Supercontinuum Generation in Photonic Crystal Fiber [Электронный ресурс] // Reviews of Modern Physics. 2006. Vol. 78, Issue 4. doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.1135>

14. Russell P. St. J. Photonic-Crystal Fibers // Journal of Lightwave Technology. 2006. Vol. 24, Issue 12. P. 4729–4749. URL: <https://opg.optica.org/jlt/abstract.cfm?uri=JLT-24-12-4729> (дата обращения: 20.06.2022).

15. Sharma D. K., Tripathi S. M., Sharma A. Modal Analysis of High-Index Core Tellurite Glass Microstructured Optical Fibers in Infrared Regime // Journal of Non-Crystalline Solids. 2019. Vol. 511. P. 147–160. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2019.02.001>

16. Котляр В. В., Ковалев А. А., Налимов А. Г. Градиентные элементы микрооптики для достижения сверхразрешения // Компьютерная оптика. 2009. Т. 33, № 4. С. 369–378. URL: <https://clck.ru/32cDqP> (дата обращения: 20.06.2022).

17. Optical Fibers with Gradient Index Nanostructured Core / R. Buczyński [et al.] // Optics Express. 2015. Vol. 23. P. 25588–25596. doi: <https://doi.org/10.1364/OE.23.025588>

18. Gladkikh V. A., Vlasenko V. D. Investigation of the Dependence of the Field Energy in a Low Conductive Fiber Optic with a Gradient Profile of the Refractive Index [Электронный ресурс] // Optik. 2021. Vol. 245. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.167735>

19. Листвин В. Н., Трещиков В. Н. DWDM-системы // Фотон-экспресс. 2012. № 7. С. 34–37. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20211587> (дата обращения: 20.06.2022).

20. Гладких В. А. Расчет мощности поля, проникающего во внешнюю оболочку слабонаправляющего одномодового волоконного световода // Компьютерная оптика. 2019. Т. 43, № 4. С. 557–561. doi: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-4-557-561>

21. Гладких В. А., Власенко В. Д. Энергетические потери при сращивании двух оптических волокон, одно из которых эллиптически деформировано в месте соединения // Радиотехника и электроника. 2020. Т. 65, № 11. С. 1074–1078. doi: <https://doi.org/10.31857/S0033849420110066>

22. Гладких В. А., Власенко В. Д. Расчет потерь при сращивании двух волокон, одно из которых эллиптически деформировано в поперечнике по всей длине // Оптический журнал. 2021. Т. 88, № 2. С. 73–78. doi: <https://doi.org/10.17586/1023-5086-2021-88-02-73-78>

23. Hall B. C. Quantum Theory for Mathematicians (Graduate Texts in Mathematics, 267). New York : Springer, 2013. 566 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5>

*Поступила 27.06.2022; одобрена после рецензирования 12.09.2022; принята к публикации 19.10.2022*  
*Technologies, machinery and equipment* 597

Об авторах:

**Гладких Вячеслав Александрович**, старший научный сотрудник Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук (680000, Российская Федерация, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3922-9609>, Researcher ID: [GLU-2712-2022](https://orcid.org/0000-0002-3922-9609), [gladkih@as.khb.ru](mailto:gladkih@as.khb.ru)

**Власенко Виктор Дмитриевич**, ученый секретарь Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук (680000, Российская Федерация, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7782-4532>, Researcher ID: [E-2432-2019](https://orcid.org/0000-0001-7782-4532), [vlasenko@as.khb.ru](mailto:vlasenko@as.khb.ru)

Заявленный вклад авторов:

В. А. Гладких – разработка концепции и плана статьи, проведение теоретических исследований, обзор и анализ литературы, формулировка выводов.

В. Д. Власенко – расчеты, анализ результатов, подготовка текста с последующей доработкой.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

## REFERENCES

1. Tong Y., Chen S., Tian H. A Bend-Resistant Low Bending Loss and Large Mode Area Two-Layer Core Single-Mode Fiber with Gradient Refractive Index Ring and Multi-Trench. *Optical Fiber Technology*. 2018;45:235–243. doi: <https://doi.org/10.1016/j.yofte.2018.07.010>
2. Wang G., Zhang J., Zhang H., et al. A Low Crosstalk Multi-Core Few-Mode Fiber with Composite Refractive Index Profile and Air-Hole Embedded Trench Assistance. *Optics Communications*. 2019;499. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127258>
3. Hennekinga S., Grosekb J., Demkowicza L. Model and Computational Advancements to Full Vectorial Maxwell Model for Studying Fiber Amplifiers. *Computers & Mathematics with Applications*. 2021;85(1):30–41. doi: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.01.006>
4. Brientin A., Leduc D., Gaillard V., et al. Numerical and Experimental Study of a Multimode Optical Fiber Sensor Based on Fresnel Reflection at the Fiber Tip for Refractive Index Measurement. *Optics & Laser Technology*. 2021;143. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.107315>
5. Eldidamony H.A., Ahmed H.M., Zaghrou A.S., et al. Cubic–Quartic Solitons in Twin-Core Couplers with Optical Metamaterials Having Kudryashov’s Sextic Power Law of Arbitrary Refractive Index by Using Improved Modified Extended Tanh-Function Method. *Optik*. 2022;265. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169498>
6. Talukdar T.H., Allen G.D., Kravchenko I., Ryckman J.D. Single-Mode Porous Silicon Waveguide Interferometers with Unity Confinement Factors for Ultra-Sensitive Surface Adlayer Sensing. *Optics Express*. 2019;23(16):22485–22498. doi: <https://doi.org/10.1364/OE.27.022485>
7. Hochberg M., Baehr-Jones T., Walker C., et al. Segmented Waveguides in Thin Silicon-On-Insulator. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*. 2005;22(7):1493–1497. doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.22.001493>
8. Knight J.C., Birks T.A., Russell P.St.J., Atkin D.M. All-Silica Single-Mode Optical Fiber with Photonic Crystal Cladding. *Optics Letters*. 1997;21(19):1547–1549. doi: <https://doi.org/10.1364/OL.21.001547>
9. White T.P., Kuhlmeiy B.T., McPhedran R.C., et al. Multipole Method for Microstructured Optical Fibers. I. Formulation. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*. 2002;19(10):2322–2330. doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.19.002322>
10. Kuhlmeiy B.T., White T.P., Renversez G., et al. Multipole Method for Microstructured Optical Fibers. II. Implementation and Results. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*. 2002;19(10):2331–2340. doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.19.002331>

11. Gaponov D.A., Biriukov A.S. The Effective Method for Analysis of Optical Properties of Micro-structured Optical Fibers. *Foton-Ekspres*. 2005;(6):77–104. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20211611> (accessed 20.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
12. Roberts P.J., Couny F., Sabert H., et al. Ultimate Low Loss of Hollow-Core Photonic Crystal Fibers. *Optics Express*. 2005;13(1):236–244. doi: <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.000236>
13. Dudley J.M., Genty G., Coen S. Supercontinuum Generation in Photonic Crystal Fiber. *Reviews of Modern Physics*. 2006;78(4). doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.1135>
14. Russell P.St.J. Photonic-Crystal Fibers. *Journal of Lightwave Technology*. 2006;24(12):4729–4749. Available at: <https://opg.optica.org/jlt/abstract.cfm?uri=JLT-24-12-4729> (accessed 20.06.2022).
15. Sharma D.K., Tripathi S.M., Sharma A. Modal Analysis of High-Index Core Tellurite Glass Microstructured Optical Fibers in Infrared Regime. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2019;511:147–160. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2019.02.001>
16. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Nalimov A.G. [Gradient Micro-Optics Elements to Achieve Super-Resolution]. *Computer Optics*. 2009;33(4):369–378. Available at: <https://clck.ru/32cDqP> (accessed 20.06.2022). (In Russ.)
17. Buczyński R., Klimczak M., Stefaniuk T., et al. Optical Fibers with Gradient Index Nanostructured Core. *Optics Express*. 2015;23:25588–25596. doi: <https://doi.org/10.1364/OE.23.025588>
18. Gladkikh V.A., Vlasenko V.D. Investigation of the Dependence of the Field Energy in a Low Conductive Fiber Optic with a Gradient Profile of the Refractive Index. *Optik*. 2021;245. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.167735>
19. Listvin V.N., Treshchikov V.N. [DWDM Systems]. *Foton-Ekspres*. 2012;(7):34–37. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20211587> (accessed 20.06.2022). (In Russ.)
20. Gladkikh V.A. Calculation of the Power of the Field, Penetrating into the External Environment of the Weakening Guide of a Single-Mode Fiber. *Computer Optics*. 2019;43(4):557–561. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-4-557-561>
21. Gladkikh V.A., Vlasenko V.D. Energy Loss during Splitting of Two Optical Fibers, One of Which Is Elliptically Deformed at the Joint. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2020;65(11):1074–1078. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.31857/S0033849420110066>
22. Gladkikh V.A., Vlasenko V.D. Calculation of the Splice Loss of Two Fibers, One of Which Is Elliptically Deformed along Its Entire Length. *Journal of Optical Technology*. 2021;88(2):73–78. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.17586/1023-5086-2021-88-02-73-78>
23. Hall B.C. *Quantum Theory for Mathematicians* (Graduate Texts in Mathematics, 267). New York: Springer; 2013. 566 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5>

*Submitted 27.06.2022; approved after reviewing 12.09.2022; accepted for publication 19.10.2022*

*About the authors:*

**Vyacheslav A. Gladkikh**, Senior Researcher, Computer Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (65 Kim Yu Chen St., Khabarovsk 680000, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3922-9609>, Researcher ID: [GLU-2712-2022](https://orcid.org/0000-0002-3922-9609), [gladkih@as.khb.ru](mailto:gladkih@as.khb.ru)

**Victor D. Vlasenko**, Academic Secretary, Computer Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (65 Kim Yu Chen St., Khabarovsk 680000, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7782-4532>, Researcher ID: [E-2432-2019](https://orcid.org/0000-0001-7782-4532), [vlasenko@as.khb.ru](mailto:vlasenko@as.khb.ru)

*Contribution of the authors:*

V. A. Gladkikh – development of the concept and plan of the article, conducting theoretical research, review and analysis of the literature, formulation of conclusions.

V. D. Vlasenko – calculations, analysis of the results, preparation of the text with subsequent revision.

*All authors have read and approved the final manuscript.*