



## Определение границ изменения внешних параметров, усложняющих расчет подвески сельскохозяйственной техники

Н. А. Пеньков<sup>1</sup>✉, С. Ю. Жачкин<sup>2</sup>, А. И. Завражнов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил  
«Военно-воздушная академия имени профессора

Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»  
(г. Воронеж, Российская Федерация)

<sup>2</sup> Воронежский государственный технический университет  
(г. Воронеж, Российская Федерация)

<sup>3</sup> Мичуринский государственный аграрный университет  
(г. Мичуринск, Российская Федерация)

✉ [myth\\_nr\\_nikit@mail.ru](mailto:myth_nr_nikit@mail.ru)

### Аннотация

*Введение.* В статье рассматривается проблема расчета прочности вала привода колес сельскохозяйственной техники. Учитываются условия прочности как наибольшего крутящего момента, так и величины относительных деформаций вала.

*Цель статьи.* Определение границ внешних воздействий на элемент конструкции, обусловленных распределенным весом автотракторной техники, при которых необходимо построение не только эпюр моментов и деформаций, но и определение экстремальных значений на каждом участке, где изменение показателя прочности конструкции нелинейно.

*Материалы и методы.* При расчетах использованы основные положения механики сплошных сред, теории машин и механизмов, а также основы проектирования в машиностроении. Центральное внимание уделено влиянию внешних факторов воздействия на характер распределения внутренних усилий в вале.

*Результаты исследования.* Полученная область изменения параметров  $P-q$  позволяет определять необходимость более детального расчета прочностных показателей рассматриваемой детали. Это связано с появлением экстремальных областей вне границ отдельных участков рассмотрения работы вала. Результаты представлены в виде двумерного графика соотношения внешних воздействий, при которых указанный эффект имеет место.

*Обсуждение и заключение.* В сравнении с типовыми расчетами, регламентированными нормативными документами, предлагаемый алгоритм на предварительном этапе позволяет определить случаи, когда нелинейные области изменения изгибающего момента требуют дополнительных исследований. Использование представляемого алгоритма позволяет, не прибегая к трудоемким численным методам расчета прочностных показателей вала привода колес, как, например, методу конечных элементов, получать более детальную картину о характере распределения внутренних усилий и деформаций в изучаемой детали.

© Пеньков Н. А., Жачкин С. Ю., Завражнов А. И., 2023



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License.  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

**Ключевые слова:** главные компоненты тензора напряжений, деформации, эпюры, внешние параметры воздействия, прочность

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Пеньков Н. А., Жачкин С. Ю., Завражнов А. И. Определение границ изменения внешних параметров, усложняющих расчет подвески сельскохозяйственной техники // Инженерные технологии и системы. 2023. Т. 33, № 2. С. 207–218. <https://doi.org/10.15507/2658-4123.033.202302.207-218>

*Original article*

## Determination of the Boundaries of Changes in External Parameters that Complicate the Calculation of the Suspension of Agricultural Machinery

N. A. Penkov<sup>a</sup>✉, S. Yu. Zhachkin<sup>b</sup>, A. I. Zavrazhnov<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Military Research and Training Center of the Air Force Military Air Academy named after Prof. N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin (Voronezh, Russian Federation)

<sup>b</sup> Voronezh State Technical University (Voronezh, Russian Federation)

<sup>c</sup> Michurin State Agrarian University (Michurinsk, Russian Federation)

✉ [myth\\_np\\_nikit@mail.ru](mailto:myth_np_nikit@mail.ru)

### Abstract

**Introduction.** The article deals with the problem of calculating the strength of the shaft of the wheel drive of agricultural machinery. The strength conditions of both the maximum torque and the values of relative deformations of the shaft are taken into account.

**Aim of the Article.** Of the research is to determine the limits of external influences on a structural element, caused by the distributed weight of the motor-tractor machinery, at which it is necessary to construct not only the torque and strain diagrams, but also to determine the extreme values at each section, where the strength index of the structure is nonlinear.

**Materials and Methods.** In calculations, the main provisions of continuum mechanics, theory of machines and mechanisms, as well as the basics of design in mechanical engineering are used. Central attention is paid to the influence of external influencing factors on the character of internal force distribution in the shaft.

**Results.** The obtained area of variation of parameters  $P$ - $q$  allows us to determine the necessity of more detailed calculation of strength parameters of the considered part. This is due to the emergence of extreme areas outside the boundaries of individual areas of consideration of the shaft work. The results are presented as a two-dimensional graph of the ratio of external influences, at which the specified effect takes place.

**Discussion and Conclusion.** In comparison with typical calculations, regulated by normative documents, the proposed algorithm at the preliminary stage allows to determine the cases when nonlinear regions of bending moment changes require additional investigations. The use of the proposed algorithm allows, without resorting to time-consuming numerical methods of calculating the strength indicators of a wheel drive shaft, such as the finite element method, to obtain a more detailed picture of the nature of distribution of internal forces and deformations in the part under study.

**Keywords:** main components of the stress tensor, deformations, diagrams, external influence parameters, strength



**Conflict of interest:** The authors declare no conflict of interest.

**For citation:** Penkov N.A., Zhachkin S. Yu., Zavrzhnov A.I. Determination of the Boundaries of Changes in External Parameters that Complicate the Calculation of the Suspension of Agricultural Machinery. *Engineering Technologies and Systems*. 2023;33(2):207–218. <https://doi.org/10.15507/2658-4123.033.202302.207-218>

## Введение

Современное развитие технических машин в различных сферах человеческой деятельности требует постоянного повышения требований к их характеристикам. Это приводит к появлению новых научно-технических проблем, решение которых обеспечивает рост производственных возможностей общества<sup>1</sup>. Одним из примеров повышения эффективности использования автотракторной техники в сельскохозяйственной отрасли служит вопрос повышения надежности ее элементов подвески<sup>2</sup> [1; 2].

Проблематика надежности во многом характеризуется ее взаимосвязью со всеми этапами жизненного цикла рассчитываемого узла, начиная от проектирования и изготовления и заканчивая использованием и последующим списанием вышедшего из строя изделия<sup>3</sup> [3]. Все этапы жизненного цикла вносят свой вклад в решение комплексной задачи создания машины требуемого уровня надежности при минимизации затрат времени и финансов. Решения, принятые на этапе проектирования, в значительной мере определяют эксплуатационные и экономические показатели рассчитываемого изделия. Указанные параметры не

являются независимыми. Определение существующей взаимосвязи между ними во многом помогает решать оптимизационную задачу получения максимальных эксплуатационных показателей при заданных исходных параметрах рассчитываемого узла [4–7].

В этой связи в статье представлен пример алгоритма одного из показателей, определяющих надежность и качество проектируемого изделия – координат опасного сечения рабочего узла. Рассматривается проблема расчета прочности вала привода колес сельскохозяйственной техники на основании допущений механики сплошных сред. Учитываются условия прочности как наибольшего крутящего момента, так и величины относительных деформаций вала<sup>4</sup> [1; 8]. Задачей исследования является разработка способа определения области фазового пространства изменения внешних воздействий на элемент конструкции, обусловленных распределенным весом автотракторной техники, при которых необходимо построение не только эпюр моментов и деформаций, но и определение экстремальных значений на каждом участке, где изменение показателя прочности конструкции нелинейно.

<sup>1</sup> Timoshenko S. P. *Strength of Materials. P. 1. Elementary Theory and Problems*. New York: D. Van Nostrandcompany, 1930. P. 365; Тимошенко С. П. *История науки о сопротивлении материалов*. М.: Наука, 1957. С. 560; Седов Л. И. *Механика сплошной среды Т. 1*. М.: Наука, 1976. С. 536; Timoshenko S. P. *Strength of Materials. P. 2. Advanced Theory and Problems*. New York: D. Van Nostrandcompany, 1941. P. 480.

<sup>2</sup> Проников А. С. *Надежность машин*. М.: Машиностроение, 1978. С. 592.

<sup>3</sup> Тимошенко С. П. *История науки о сопротивлении материалов*; Проников А. С. *Надежность машин*; Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. *Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании*. Владивосток: Из-во ДВГТУ, 2011. С. 280.

<sup>4</sup> Седов Л. И. *Механика сплошной среды Т. 1*; Marguerre K. *Luftfahrtforsch: Nat. advisory comm. aeronaut. No. 1005*. 1942. P. 253–261; Karman Th. *Über die Grundlagen der Balkentheorie [Beyond the Basics of the beam theory]*. *Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule, Aachen*. 1927. Vol. 7.

В наиболее общем виде расчеты нагруженного вала на прочность необходимо вести по нескольким показателям: предельная нагрузка от действия изгибающего момента, предельная нагрузка от поперечной силы и величина допустимой деформации оси вала<sup>5</sup> [9–11]. Общее заключение о несущей способности детали можно сделать на основе анализа всех вышеперечисленных факторов.

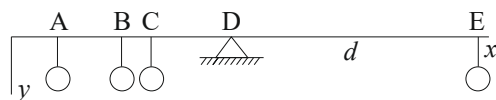
В настоящий момент в подавляющем большинстве случаев комплексные расчеты деталей машин на надежность и долговечность не производятся. Кроме того, нет единой схемы производства таких расчетов<sup>6</sup> [6; 12; 13]. Инженеры ограничиваются отдельными показателями, не способными характеризовать работу изучаемого узла в целом в течение всего жизненного цикла.

### Обзор литературы

Исследование поведения поперечно нагруженных симметричных балок, является начальным этапом изучения работы упругих твердых тел в рамках сопротивления материалов в технических вузах. Предваряют это изучение лишь симметричные растяжения и сжатия тел правильной формы<sup>7</sup> [14; 15].

Первые систематические исследования работы балок на изгиб были проведены французским ученым Мариоттом<sup>8</sup> [11]. Помимо прочности материалов, его также интересовала упругая составляющая процесса деформирования. В своих экспериментах с поперечно нагруженными симметричными балками (схема эксперимента представлена на рисунке 1) он показывает, что разрушение наступает тогда, когда удлинение

конструкции превышает некоторое предельное значение (варьируемый параметр –  $d$ )<sup>9</sup> [16].



Р и с. 1. Опыты Мариотта на изгиб  
F i g. 1. Marriott's bending experiments

Далее Мариотт замечает, что волокна в нижней части поперечного сечения испытывают сжимающие усилия, в то время как волокна верхней части – растянуты. Прочность растянутых волокон в этом случае будет равна половине значения прочности всей конструкции, аналогичные рассуждения он проводит и для сжатых волокон. Однако получить правильное соотношение для прочности всей конструкции ему помешал некорректный расчет площади поперечного сечения.

Для определения уравнения изогнутой оси балки Я. Бернулли впервые использует аппарат математического анализа. Он вводит понятие кривизны кривой изгиба и определяет ее взаимосвязь с величиной изгибающего момента<sup>10</sup> [17; 18]. Более детально этот вопрос разработал в дальнейшем Эйлер, решая задачу о цепной линии с использованием аппарата вариационного исчисления [14; 19].

Предел прочности балки в своих трудах впервые описал Кулон, анализируя уравнения статики для горизонтальных и вертикальных составляющих внутренних усилий в рассматриваемом сечении. Он аналитически установил, что центром

<sup>5</sup> Timoshenko S. P. Strength of Materials. P. 1; Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании.

<sup>6</sup> Молчанов В. Ф. Повышение долговечности и надежности работы деталей машин, механизмов и приборов хромированием в саморегулирующемся электролите с добавкой бихромата калия. Киев : КВИАУ, 1968. 219 с.

<sup>7</sup> Timoshenko S. P. Strength of Materials. P. 2.

<sup>8</sup> Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов; Marguerre K. Luftfahrtforsch. ...

<sup>9</sup> Timoshenko S. P. Strength of Materials. P. 2.

<sup>10</sup> Там же.

поворота изгибающийся балки является не нижняя ее кромка, а ось симметрии<sup>11</sup>.

В 1826 г. Навье впервые описывает не определение предельных нагрузок конструкций, как делали до него, а расчет предельного значения внешних воздействий на тело, при котором оно ведет себя еще упруго<sup>12</sup> [8]. Полагая прогибы, возникающие в балке, малыми, он определяет зависимость:

$$EJ_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (1)$$

где  $J_z$  – момент инерции сечения балки;  $M$  – величина изгибающего момента в рассматриваемом сечении относительно нейтральной оси, а система координат вводится так, как представлено на рисунке 1. Ею он пользуется для любого случая поперечного нагружения простой балки.

Сен-Венан, используя аппарат математической теории упругости, показал, что при расчетах балок методами сопротивления материалов можно пользоваться рядом существенных допущений [11]:

- поперечные сечения балок остаются плоскими при деформировании;
- продольные волокна балки не оказывают какого-либо воздействия друг на друга, испытывая лишь растяжение/сжатие.

Однако, несмотря на значимость вышеперечисленных исследований, не все результаты, полученные в них, нашли отражение в существующих методах расчета элементов конструкций на прочность используемых инженерно-техническим составом.

В настоящий момент расчеты на прочность проводятся с использованием ГОСТ 27609-88 «Расчеты и испытания

на прочность в машиностроении» по направлениям применения рассматриваемых деталей и механизмов. Если точности моделей, предусмотренных допущениями сопротивления материалов, достаточно для расчетов элементов конструкций, то нормативных документов, определяющих алгоритм такого расчета, оказывается недостаточно. Здесь возможны исключения, когда определение критических значений внутренних усилий таким способом существенно неверно. Залогом правильного определения прочностных показателей рассчитываемой детали является корректное определение опасного сечения в рассматриваемом случае. Этой цели посвящена настоящая статья.

### Материалы и методы

В современной инженерной практике есть определенные трудности в использовании конечных соотношений по расчету различных элементов конструкций с использованием аппарата механики сплошных сред<sup>13</sup> [4]. В этой связи целесообразным видится разработка рекомендаций при производстве инженерных расчетов, позволяющая, в случае необходимости, проводить корректировку определения опасных сечений либо величин внутренних усилий, возникающих от действия внешних факторов на рассматриваемую деталь.

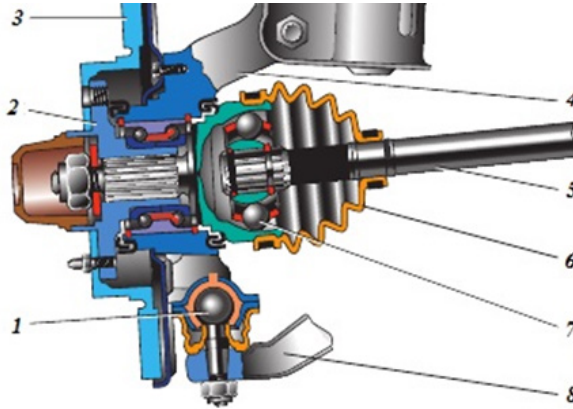
Схема расположения вала привода колеса в системе подвески автотракторной техники представлена на рисунке 2. Сила  $P$  характеризует контакт полуоси со ступицей колеса, распределенная нагрузка  $q$  – нагрузку от частей дифференциала. Представленная модель во многих случаях адекватно описывает напряженно-деформированное состояние работы вала.

<sup>11</sup> Timoshenko S. P. Strength of Materials. P. 2.

<sup>12</sup> Там же; Спицин И. А., Голубев И. Г. Новые технологические процессы восстановления деталей машин гальваническими покрытиями. М.: ФГНУ «Росинформагротех», 2001.

<sup>13</sup> Молчанов В. Ф. Повышение долговечности и надежности работы деталей машин...

<sup>14</sup> Молчанов В. Ф. Повышение долговечности и надежности работы деталей машин...



Р и с. 2. Механизм крепления вала привода колеса:  
 1 – шаровая опора; 2 – ступица; 3 – тормозной диск; 4 – поворотный кулак;  
 5 – вал привода переднего колеса; 6 – защитный чехол; 7 – наружный шарнир вала;  
 8 – нижний рычаг

Fig. 2. Wheel drive shaft mounting mechanism:  
 1 – spherical bearing; 2 – hub; 3 – brake disk; 4 – rounded fist; 5 – front wheel drive shaft;  
 6 – protective case; 7 – external shaft joint; 8 – lower arm

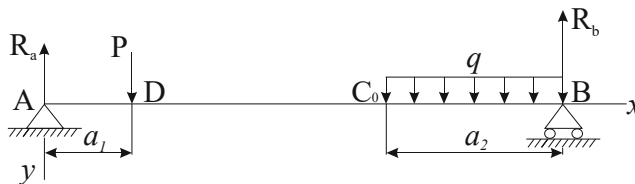
В качестве модели работы вала принимается статически определимая симметричная поперечно нагруженная стальная балка, представленная на рисунке 3.

При определении напряжений и деформаций в рассматриваемой детали приняты допущения механики сплошных сред. Вводится пространственная декартова прямоугольная система координат. Начало координат находится в точке  $A$  (рис. 3), ось  $Ax$  совпадает с направлением вектора  $\overline{AB}$ , ось  $Ay$  направлена вдоль линий действия сил (направление совпадает с направлением вектора  $\overline{P}$ ), ось  $Az$  – перпендикулярно плоскости рисунка, причем направление выбрано так, что указанные оси образуют правую тройку векторов.

В качестве материала изготовления детали используется конструкционная сталь, для которой определены основные показатели, характеризующие ее механические свойства: плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона.

Сечение вала плоскостью  $Axz$  – круг, радиуса  $d$ . Для него момент инерции относительно оси  $Az$ :  $J_z = \frac{\pi d^4}{64}$ .

Длина вала принимается:  $a$ . Расстояния  $AD$  и  $CB$  (рис. 3) полагаем:  $a_1$  и  $a_2$ . Усилие, передаваемое от веса заданной единицы техники на левую оконечность вала, примем  $P$  (площадь контакта много меньше длины вала), распределенная нагрузка в месте крепления вала



Р и с. 3. Модель работы вала привода колеса  
 Fig. 3. Model of the wheel driveshaft

с дифференциалом:  $q$  (значительная площадь контакта обуславливается жесткими режимами эксплуатации сельскохозяйственной техники).

Расчеты на прочность проводятся исходя из условия максимального изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении детали<sup>14</sup> [20; 21].

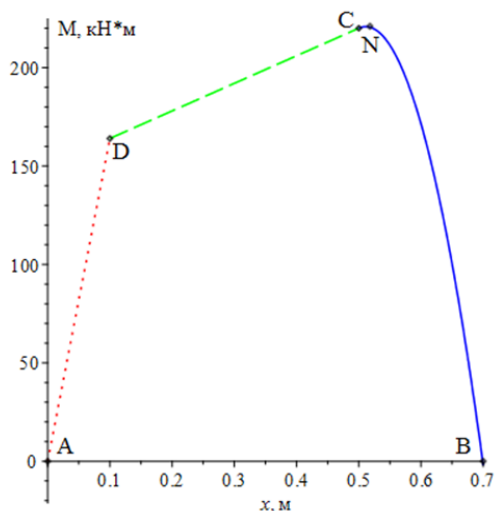
### Результаты исследования

Методами статики определяем значения сил реакции, возникающих в вале на примере сеялки Väderstad RAPIDRD 300 при  $P = 1,5$  кН,  $q = 12,5$  кН/м,  $a = 0,7$  м,  $a_1 = 0,1$  м,  $a_2 = 0,2$  м,  $d = 0,04$  м,  $R_a = 1,64$  кН,  $R_b = 2,36$  кН. На основе полученных данных строим эпюру изгибающего момента для всей балки (рис. 4).

Максимальное значение изгибающего момента при данном виде нагружения реализуется в сечении, проходящем через точку  $N$  (рис. 4) нормально к оси симметрии вала (расчеты проводились с использованием пакета математических программ Maple). Расстояние  $AN = 0,51$  м.

Для определения прогибов вала вдоль всей длины воспользуемся соотношением (1). Для уравнений ординат прогибов будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{EJ_z} \left( -\frac{R_a}{6} x^3 + C_1 x + C_2 \right), x \in [0, a_1] \\ y = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{P - R_a}{6} x^3 - \frac{Pa_1}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \right), x \in [a_1, a - a_2] \\ y = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{q}{24} x^4 + \frac{P - R_a - q(a - a_2)}{6} x^3 + \frac{q(a - a_2)^2 - 2Pa_1}{4} x^2 + C_5 x + C_6 \right), x \in [a - a_2, a] \end{array} \right. \quad (2)$$



Р и с. 4. Эпюра изгибающего момента поперечно нагруженного вала

F i g. 4. Diagram of the bending moment which perceives a transversely loaded shaft

Неизвестные постоянные интегрирования определяются из начальных и граничных условий: прогибы в точках  $A$  и  $B$  равны нулю, прогибы слева и справа соответственно от точек  $C$  и  $D$  совпадают (нет разрывов вала), касательные в указанных точках также совпадают с обеих сторон (нет изломов вала). В итоге получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 - C_3 - 10C_4 = -5 \\ C_1 - C_3 = -6,1 \\ C_3 + 2C_4 - C_5 - 2C_6 = 195,3 \\ C_3 - C_5 = 260,42 \\ C_6 = -0,7C_5 - 110 \\ C_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Определитель указанной системы отличен от нуля, следовательно, существует единственное решение, представимое

<sup>14</sup> Timoshenko S. P. Strength of materials. P. 1.

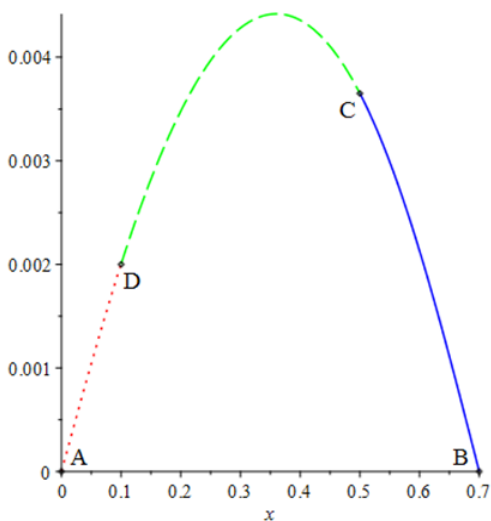
следующей точкой в шестимерном пространстве констант:  $\{55,6; 0; 63,1; -0,25; -197,32; 32,3\}$ .

Таким образом, для уравнения изогнутой оси вала<sup>15</sup> окончательно будем иметь:

$$\begin{cases} y = -0,1x^3 + 0,02x, x \in [0, a_1) \\ y = -8,84 \cdot 10^{-3}x^3 - 0,03x^2 + \\ + 0,02x - 9,48 \cdot 10^{-5}, x \in [a_1, a - a_2). \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y = 0,2x^4 - 0,4x^3 + 0,27x^2 - \\ - 0,07x + 0,01, x \in [a - a_2, a] \end{cases}$$

Графически выражение (4) представлено на рисунке 5. Максимальный прогиб реализуется на участке DC.



Р и с. 5. Уравнение изогнутой оси вала  
F i g. 5. Curved shaft axis equation

Зададимся теперь целью определения всех таких вариантов нагружения вала, при которых опасное сечение расположено не на границе двух зон с заданным законом распределения момента, проходящим через точку C, а на участке CD.

Такое положение дел приводит нас к необходимости более детального исследования уравнения изменения момента на исследуемом участке. Указанный случай обычно не учитывается в инженерных расчетах валов на прочность. Реализация такого сценария происходит, когда абсцисса вершины параболы CNB (рис. 4) расположена правее точки C. В общем случае она определяется следующим соотношением:

$$x_{\max} = \frac{1}{2}a + \frac{(a - a_2)^2}{2a} - \frac{a_1}{a} \cdot \frac{P}{q}, \quad (5)$$

и является функцией пяти параметров. Условно их можно разделить на две группы. К первой относятся параметры, определяющие координаты точек приложения внешних нагрузок на вал:  $a, a_1, a_2$ ; ко второй – интенсивность приложенных усилий:  $P, q$ .

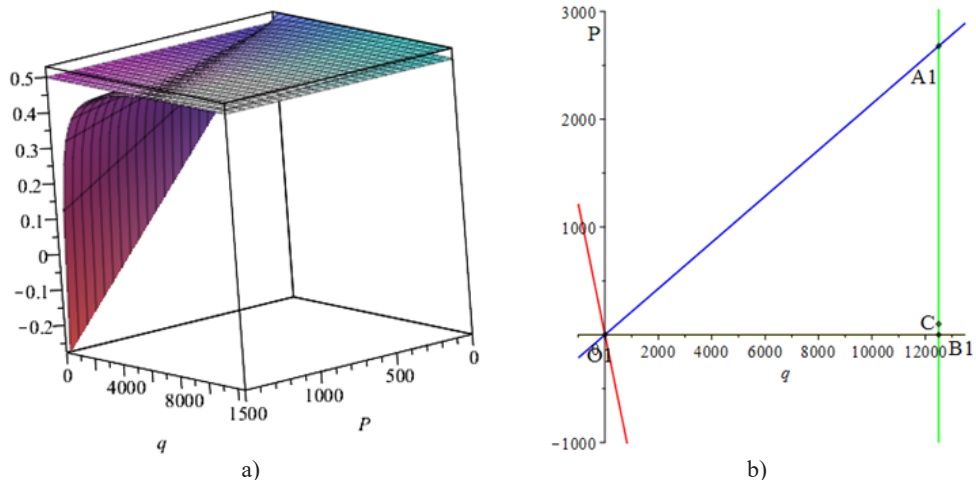
Принимая характер распределения внешних воздействий на вал неизменным (считаем, что расчет производится по заданному проекту компоновки подвески автотракторной техники – на примере сеялки VäderstadRAPIDRD 300), координаты опасного сечения будут определяться интенсивностью внешних воздействий на вал:

$$x_{\max} = 0,53 - 0,14 \frac{P}{q}. \quad (6)$$

Для определения зоны изменения параметров  $P$ - $q$  исходим из следующих предположений. Диапазон изменения величины  $x_{\max}$  задан интервалом  $(a - a_2, a]$ . Значения внешних воздействий положительны. Накладывая указанные условия на зависимость (5) получим графическое представление искомой области (рис. 6).

Численное решение указанной системы неравенств методом перебора с использованием пакета математических программ Maple позволило определить





Р и с. 6. Критическая область изменения внешних воздействий, приводящая к необходимости проведения дополнительных расчетов:  
 а – абсцисса опасного сечения как функция внешних воздействий;  
 б – область кривой (б), находящаяся выше плоскости  $x = 0,5$  м

Fig. 6. Critical area of change the external influences, leading to the need for additional calculation:  
 а – abscissa of the dangerous section as a function of external influences;  
 б – area of the curve (b) above the plane  $x = 0.5$  m

значение параметров  $P$ - $q$ , при котором отклонение точки экстремума на эпюре изгибающих моментов от точки  $C$  (рис. 4) будет иметь место. Это позволит определить наиболее невыгодное положение существующей системы расчета вала на прочность, дав максимальное различие с результатами, полученными с использованием предложенной методики. Найденная область изменения параметров внешнего воздействия  $O_1A_1B_1$  изображена на рисунке 6 б. Красная прямая определяет здесь полуплоскость, задаваемую неравенством  $x_{\max} > 0,5$ , синяя – полуплоскость  $x_{\max} < 0,7$ . Точкой  $C$  обозначено напряженное состояние, рассматриваемое на рисунках 3–5. Она принадлежит треугольнику  $O_1A_1B_1$ , что и позволяет говорить в рассматриваемом случае о необходимости проведения скорректированного расчета.

#### Обсуждение и заключение

В результате авторами получена область  $O_1A_1B_1$ , представленная на рисунке 6, которая определяет границы

изменения усилий, воспринимаемых валом от внешних воздействий, при которых координаты расположения опасного сечения не являются очевидными и не всегда корректно определяются при производстве инженерных расчетов деталей подвески сельскохозяйственной техники на прочность согласно ГОСТ 27609-88. В этом случае исследования необходимо продолжить, определив координаты поперечного сечения, в котором реализуется экстремум величины изгибающего момента на интервале  $(a-a_2, a]$  изменения координаты вдоль оси симметрии вала, а затем определить его значение. Разработанная в среде Maple программа позволяет для данного типа нагрузки определить область изменения внешних параметров, а в случае выхода значений нагрузки за указанные границы – провести скорректированный расчет опасного сечения в полуоси, дающего возможность более точно произвести расчет всей детали на прочность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The Impact of the Strengthening Phase Filler on the Properties of Composite Dispersion-Strengthened Galvanic Coatings / S. Yu. Zhachkin [et al.] // *Engineering Computations*. 2018. Vol. 35, no. 8 (2). P. 3245–3251.
2. Управление внутренними напряжениями в гальванических композитных покрытиях на основе железа / С. Ю. Жачкин [и др.] // *Труды ГОСНИТИ*. 2017. Т. 129. С. 183–188.
3. Астахов М. В. Износостойкость композиционных хромовых покрытий, полученных методом гальваноконтактного осаждения // *Известия вузов. Машиностроение* : сб. науч. тр. М., 2004.
4. Жачкин С. Ю., Трифонов Г. И. Оценка физико-механических параметров покрытий плазменного напыления после восстановления детали трения авиационной промышленности // *ВКС. Теория и практика*. 2019. № 11. С. 77–84. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-fiziko-mehnicheskikh-parametrov-pokrytiy-plazmennogo-napyleniya-posle-vostranovleniya-detali-treniya-aviatsionnoy/viewer> (дата обращения: 11.02.2023).
5. Zhachkin S. Yu., Penkov N. A., Krasnova M. A. The Technical Definition of Permanent Dispersion-Strengthened Composite Multilayer Galvanic Coatings // *Australian Journal of Education and Science*. 2018. Vol. XI, no. 1 (21). Pp. 238–253.
6. Zhachkin S. Yu., Penkov N. A., Krasnova M. A. Analytical Calculation of Elastic Modulus of Composite Electroplating Coatings // *MATPR 10241*. 2019. P. 2515–2517. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.08.172>
7. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67, № 2. С. 316–325. EDN: OOMUOZ
8. Определение напряжений в гальваническом композитном покрытии с учетом теории дислокаций / С. Ю. Жачкин [и др.] // *ВКС. Теория и практика*. 2020. № 13. С. 221–228. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-napryazheniy-v-galvanicheskom-kompozitnom-pokrytii-s-uchetom-teorii-dislokatsiy/viewer> (дата обращения: 11.02.2023).
9. Warier R. R., Sinha A., Sukumar S. Line-of-Sight Based Spacecraft Attitude and Position Tracking Control // *European Journal of Control*. 2016. Vol. 32. Pp. 43–53. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2016.04.001>
10. Ивлев Д. Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // *Прикладная механика и техническая физика*. 1967. № 6. С. 88–120. URL: [https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158788&ARTICLE\\_ID=158977](https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158788&ARTICLE_ID=158977) (дата обращения: 11.02.2023).
11. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Monoaxial Attitude Stabilization of a Rigid Body Under Vanishing Restoring Torque // *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2018. Vol. 18, no. 1. P. 12–21. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4191-4>
12. Zhachkin S. Yu., Penkov N. A., Krasnova M. N. Dispersion-Hardened Composite Coatings with Desired Physical and Mechanical Properties // *Engineering Computations*. 2017. Vol. 34, no. 8 (2). P. 2577–2586.
13. Zhachkin S. Yu., Penkov N. A., Krasnova M. N. To the Question of the Influence on Pressure of the Tool on the Processed Surface when Applying the Dispensable-Strengthened Composite Galvanic Coatings // *MATPR 10241*. 2019. P. 2512–2514.
14. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical Quasi-optimal Solution for the Problem on Turn Maneuver of an Arbitrary Solid with Arbitrary Boundary Conditions // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 3. P. 474–485. <https://doi.org/10.3103/S0025654419020110>
15. Levskii M. V. Optimal Control of Kinetic Moment During the Spatial Rotation of a Rigid Body // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 1. P. 92–111.
16. About Determining the Microhardness of Composite Coatings / S. Yu. Zhachkin [et al.] // *Materials Science Forum*. 2021. Vol. 1037. P. 486–493.
17. Jahromi B. H., Varizi A. Elasto-plastic Stresses in a Functionally Graded Rotating Disk // *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2012. Vol. 134, no. 2. 021002. <https://doi.org/10.1115/1.4006023>
18. Chernoiwanov V. I. Organization and Technology of Restoration Machine Parts. Moscow : GOSNITI, 2003.
19. Akulenko L. D. Sirotnin A. N. Trigonometric Extremals in the Optimal Control Problem of the Reorientation of the axis of a Dynamically Symmetric Rotating Body // *JAMM*. 2011. Vol. 77, issue 3. P. 305–313.
20. Beaman J. J. Solid Freeform Fabrication: An Historical Perspective // *The University of Texas*. Austin, Texas. 2009. URL: <https://repositories.lib.utexas.edu/bitstream/handle/2152/76265/2001-66-Beaman.pdf?sequence=2&isAllowed=y> ( дата обращения: 11.02.2023).

21. Nejad M. Z., Rastgoo A., Hadi A. Exact Elasto-Plastic Analyses of Rotating Disks Made of Functionally Graded Materials // International journal of engineering science. 2014. Vol. 85. P. 47–57. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.07.009>

*Поступила 13.02.2023; одобрена после рецензирования 14.04.2023; принята к публикации 24.04.2023*

*Об авторах:*

**Пеньков Никита Алексеевич**, доктор технических наук, начальник лаборатории – заместитель начальника 1 ОНИ НИЦ (ОиИТ) Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (394064, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, д. 54А), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4644-3814>, [myth\\_np\\_nikit@mail.ru](mailto:myth_np_nikit@mail.ru)

**Жачкин Сергей Юрьевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автоматизированного оборудования машиностроительного производства Воронежского государственного технического университета (394026, Российская Федерация, г. Воронеж, Московский проспект, д. 14), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1844-5011>, [zhach@list.ru](mailto:zhach@list.ru)

**Завражнов Анатолий Иванович**, доктор технических наук, профессор, академик РАН, ведущий научный сотрудник Мичуринского государственного аграрного университета (393760, Российская Федерация, г. Мичуринск, ул. Интернациональная, д. 101), [snikishin24@bk.ru](mailto:snikishin24@bk.ru)

*Заявленный вклад авторов:*

Н. А. Пеньков – литературный и патентный анализ; обработка результатов теоретических исследований; доработка текста.

С. Ю. Жачкин – литературный и патентный анализ; формулирование основной концепции исследования; критический анализ.

А. И. Завражнов – научное руководство; формулирование основной концепции исследования; формулирование выводов; критический анализ.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

## REFERENCES

1. Zhachkin S.Yu., Penkov N.A., Krasnova M.A., Zavrazhnov A.I. The Impact of the Strengthening Phase Filler on the Properties of Composite Dispersion-Strengthened Galvanic Coatings. *Engineering Computations*. 2018;35(8):3245–3251.
2. Zhachkin S.Yu., Penkov N.A., Sidorkin O.A., Nelysov S.V. [Management of Internal Stresses in Electroplated Iron-Based Composite Coatings]. *Works of GOSNIT*. 2017;129:183–188. (In Russ.)
3. Astakhov M.V. [Wear Resistance of Composite Chromium Coatings Obtained by Galvanic Contact Deposition]. In: Proceedings of Higher Education Institutions. Engineering: Collection of scientific papers. Moscow; 2004. (In Russ.)
4. Zhachkin S.Yu., Trifonov G.I. Assessment of Plasma Spraying Coatings Physical and Mechanical Parameters After Restoration of the Aviation Industry Friction Parts. *VKS. Theory and Practice*. 2019;(11):77–84. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-fiziko-mehnicheskikh-parametrov-pokrytiy-plazmennogo-napyleniya-posle-vosstanovleniya-detali-treniya-aviatsionnoy/viewer> (accessed 11.02.2023). (In Russ., abstract in Eng.)
5. Zhachkin S.Yu., Penkov N.A., Krasnova M.A. The Technical Definition of Permanent Dispersion-Strengthened Composite Multilayer Galvanic Coatings. *Australian Journal of Education and Science*. 2018;11(1):238–253.
6. Penkov N.A., Zhachkin S.Yu., Krasnova M.A. Analytical Calculation of Elastic Modulus of Composite Electroplating Coatings. *MATPR*. 2019;10241:2515–2517. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.08.172>
7. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V. [Formation of a One-Dimensional Residual Stress Field in the Vicinity of a Cylindrical Continuity Flaw in an Elastic-Plastic Medium]. *PMM*; 2003;67(2):316–325. (In Russ.) EDN: OOMUOZ
8. Zhachkin S.Yu., Penkov N.A., Krasnova M.N., Yatsenko S.N. Tensions Determination in a Galvanic Composite Coating Taking Into Account the Dislocation Theory. *VKS. Theory and Practice*. 2020;(13):221–228.

Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-napryazheniy-v-galvanicheskom-kompozitnom-pokrytii-s-uchetom-teorii-dislokatsiy/viewer> (accessed 11.02.2023). (In Russ., abstract in Eng.)

9. Warier R.R., Sinha A., Sukumar S. Line-of-Sight Based Spacecraft Attitude and Position Tracking Control. *European Journal of Control*. 2016;32:43–53. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2016.04.001>

10. Ivlev D.D. [On the Theory of Quasi-Brittle Fracture Cracks]. *PMTF*. 1967;(6):88–120. Available at: [https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158788&ARTICLE\\_ID=158977](https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158788&ARTICLE_ID=158977) (accessed 11.02.2023). (In Russ.)

11. Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Monoaxial Attitude Stabilization of a Rigid Body under Vanishing Restoring Torque. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2018;18(1):12–21. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4191-4>

12. Zhachkin S.Yu., Penkov N.A., Krasnova M.N. Dispersion-Hardened Composite Coatings with Desired Physical and Mechanical Properties. *Engineering Computations*. 2017;34(8):2577–2586.

13. Zhachkin S.Yu., Penkov N.A., Krasnova M.N. To the Question of the Influence on Pressure of the Tool on the Processed Surface When Applying the Dispensable-Strengthened Composite Galvanic Coatings. *MATPR*. 2019;10241:2512–2514.

14. Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G. Analytical Quasi-Optimal Solution for the Problem on Turn Maneuver of an Arbitrary Solid with Arbitrary Boundary Conditions. *Mechanics of Solids*. 2019;3:474–485. <https://doi.org/10.3103/S0025654419020110>

15. Levskii M.V. Optimal Control of Kinetic Moment during the Spatial Rotation of a Rigid Body. *Mechanics of Solids*. 2019;(1):92–111.

16. Zhachkin S.Yu., Zavrazhnov A.I., Penkov N.A., Kudryavtsev G.V., Tsisarenko P.V. About Determining the Microhardness of Composite Coatings. *Materials Science Forum*. 2021;1037:486–493.

17. Jahromi B.H., Varizi A. Elasto-Plastic Stresses in a Functionally Graded Rotating Disk. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2012;134(2):021002. <https://doi.org/10.1115/1.4006023>

18. Chernouvanov V.I. Organization and Technology of Restoration Machine Parts. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow: GOSNITI; 2003.

19. Akulenko L.D., Sirotn A.N. Trigonometric Extremals in the Optimal Control Problem of the Reorientation of the Axis of a Dynamically Symmetric Rotating Body. *JAMM*. 2011;77(3):305–313.

20. Beaman J.J. Solid Freeform Fabrication: An Historical Perspective. Austin: University of Texas; 2009. Available at: <https://repositories.lib.utexas.edu/bitstream/handle/2152/76265/2001-66-Beaman.pdf?sequence=2&isAllowed=y> (accessed 11.02.2023).

21. Nejad M.Z., Rastgoo A., Hadi A. Exact Elasto-Plastic Analyses of Rotating Disks Made of Functionally Graded Materials. *International Journal of Engineering Science*. 2014;85:47–57. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.07.009>

Submitted 13.02.2023; revised 14.04.2023; accepted 24.04.2023

#### About the authors:

**Nikita A. Penkov**, Dr.Sci. (Engr.), Deputy Head of Research Department MERC AF “AFA”, Military Research and Training Center of the Air Force Military Air Academy named after Prof. N.E. Zhukovsky (54A Bolshevnikov St., Voronezh 394064, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4644-3814>, [myth\\_np\\_nikit@mail.ru](mailto:myth_np_nikit@mail.ru)

**Sergey Yu. Zhachkin**, Dr.Sci. (Engr.), Professor, Professor of the Chair of Automated Equipment of Machine-Building Production, Voronezh State Technical University (14 Moskovskiy Prospekt, Voronezh 394026, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1844-5011>, [zhach@list.ru](mailto:zhach@list.ru)

**Anatoliy I. Zavrazhnov**, Dr.Sci. (Engr.), Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Leading Researcher, Michurin State Agrarian University (101 International St., Michurinsk 394064, Russian Federation), [snikishin24@bk.ru](mailto:snikishin24@bk.ru)

#### Authors contribution:

N. A. Penkov – analyzing academic literature and patents; processing of theoretical research results; finalization of the text.

S. Yu. Zhachkin – analyzing academic literature and patents; formulation of the main concept of research; critical analysis.

A. I. Zavrazhnov – scientific guidance; formulation of the main concept of research; formation of conclusions; critical analysis.

All authors have read and approved the final manuscript.