



Устойчивость относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия нелинейных систем дифференциальных уравнений

П. П. Липасов, В. Н. Щенников

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)

*pashka0113@yandex.ru

Введение. В процессе математического моделирования динамических процессов не удастся учесть все действующие в них силы. Чтобы математическая модель наиболее точно описывала динамические процессы, в них включают слагаемые, соответствующие постоянно действующим возмущениям. Подобные меры необходимы, например, при решении прикладных задач. В данной статье рассматривается случай, когда система допускает «частичное» положение равновесия. Целью работы является доказательство теоремы об устойчивости «частичного» положения равновесия при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени. *Материалы и методы.* Объектами исследования являются нелинейные системы дифференциальных уравнений, допускающие «частичное» положение равновесия. Теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия, малых в каждый момент времени, доказываются с использованием второго метода Ляпунова.

Результаты исследования. С введением устойчивости относительно части переменных появилась потребность введения устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных. Первые теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных были получены А. С. Озиранером. Следует отметить, что в настоящее время не сформулировано теорем об устойчивости при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия, что свидетельствует об актуальности данной статьи.

Обсуждение и заключения. Доказанная в работе теорема 3 является развитием математической теории устойчивости. Полученные результаты применимы в механике управляемого движения.

Ключевые слова: постоянно действующее возмущение, устойчивость при постоянно действующих возмущениях, «частичное» положение равновесия, дифференциальное уравнение, нелинейная система

Для цитирования: Липасов П. П., Щенников В. Н. Устойчивость относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия нелинейных систем дифференциальных уравнений // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 333–340. DOI: <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.333-340>

© Липасов П. П., Щенников В. Н., 2018



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted reuse, distribution, and reproduction in any medium provided the original work is properly cited.



Stability with Respect to a Part of Variables Under Constant Perturbations of the “Partial” Equilibrium Position of Nonlinear Systems of Differential Equations

Lipasov P. P.*, Shchennikov V. N.

National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

*pashka0113@yandex.ru

Introduction. It is not possible to take into account all the forces in the process of mathematical modeling of dynamic processes. In order for the mathematical model to describe the most accurate dynamic processes, it includes terms that correspond to the constantly acting disturbances. Similar problems arise in applied tasks. In this paper we consider the case when the system allows a “partial” equilibrium position. The aim of this work is to prove the stability theorem of the “partial” equilibrium position at constant perturbations, small at each time.

Materials and Methods. The objects of research are nonlinear systems of differential equations that allow “partial” equilibrium position. Using the second Lyapunov method, stability theorems are proved for the constant perturbations of the “partial” equilibrium position, which are small at each time.

Results. With the introduction of stability with respect to a part of the variables, the need for stability with constant perturbations with respect to a part of the phase variables appeared. The first theorem on the stability under constantly acting perturbations on the part of the phase variables was obtained by A. S. Oziraner. In this work, we prove a theorem on the stability of the constantly acting perturbations of the “partial” equilibrium position, small at each time. It should be noted that there is no stability theorems under constant perturbations of the “partial” equilibrium position. Thus, the proved theorem in this work is of a pioneer nature.

Conclusions. The theorem 3 proved in the work is the development of the mathematical theory of stability. The results of this work are applicable in the mechanics of controlled motion, nonlinear system.

Keywords: constantly acting disturbances, stability at constantly acting disturbances, “partial” equilibrium position, differential equation

For citation: Lipasov P. P., Schennikov V. N., Stability with respect to a part of variables under constantly acting perturbations of the “partial” equilibrium position of nonlinear systems of differential equations. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2018; 28(3):333–340. DOI: <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.333-340>

Введение

Во многих прикладных задачах присутствуют постоянно действующие возмущения. При этом часто известны только их наибольшее и наименьшее значения. Отметим, что задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях является классической задачей общей теории устойчивости. Ее решением занимались многие ученые (Г. Н. Дубошин [1], И. Г. Малкин [2], В. И. Зу-

бов¹, Н. Н. Красовский [3], А. А. Тихонов [4], С. И. Горшин [5], А. Струсс и А. Дж. Йорк [6], К. Кордуняну [7] и др.). Во всех указанных работах используются методы теории устойчивости Ляпунова.

В данной работе продолжают исследования устойчивости при постоянно действующих возмущениях. В отличие от ранее рассматриваемых систем дифференциальных уравнений, нами изучаются системы дифференци-

¹ **Зубов В. И.** [Математические методы исследования систем автоматического регулирования](#). – 2-е изд. Л.: Машиностроение, 1974. 336 с.

альных уравнений, допускающих «частичное» положение равновесия (см., например, работы [8–9]). Известно, что в настоящее время не сформулировано теорем об устойчивости «частичного» положения равновесия при постоянно действующих возмущениях, что свидетельствует об актуальности данной статьи.

Обзор литературы

Задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях является классической задачей теории устойчивости^{2–3}.

В настоящей статье исследуется вопрос устойчивости «частичного» положения равновесия нелинейных систем, доказывається теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Достаточно полный обзор устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно всех фазовых переменных содержится в монографии⁴, а также, кроме отмеченных, в работах Р. Габасова [10], В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовского [11], С. И. Горшина [12]. С введением устойчивости относительно части фазовых переменных появилась потребность в определении устойчивости при постоянно действующих возмущениях и доказательстве соответствующих теорем. Первые теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных были доказаны А. С. Озиранером⁵.

Следует отдельно упомянуть работу А. Я. Савченко [13], в которой до-

казана теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях в предположении, что исходная система устойчива.

Материалы и методы

Для получения новых результатов по рассматриваемой тематике были использованы известные результаты теорем об устойчивости положения равновесия нелинейных систем при постоянно действующих возмущениях И. Г. Малкина⁶ и В. И. Зубова⁷. Следует отметить, что достаточно полный обзор по указанной тематике содержится в книге А. А. Мартынюка⁸.

Результаты исследования

С целью получения новых результатов приведем известную теорему об устойчивости положения равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях.

Для этого рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), f(t, 0) \equiv 0, \quad (1)$$

где

$$x \in R^n, f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))^T.$$

Предположим, что правые части системы (1) определены в области

$$\Omega = \{t, x : t \geq t_0 \geq 0, x \in H, 0 < H = \text{const}\} \quad (2)$$

непрерывными по совокупности переменных и допускают единственность решения задачи Коши при начальных данных из области (2). Здесь и далее:

² Малкин И. Г. [Теория устойчивости движения](#). М. : Наука, 1966. 530 с.

³ Зубов В. И. [Математические методы исследования систем автоматического регулирования](#). – 2-е изд. Л. : Машиностроение, 1974. 336 с.

⁴ Мартынюк А. А., Гутовски Р. [Интегральные неравенства и устойчивость движения](#). Киев : Наукова думка, 1979. 270 с.

⁵ Румянцев В. В., Озиранер А. С. [Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных](#). М. : Наука, 1987. 256 с.

⁶ Малкин И. Г. [Теория устойчивости движения](#). М. : Наука, 1966. 530 с.

⁷ Зубов В. И. [Математические методы исследования систем автоматического регулирования](#). – 2-е изд. Л. : Машиностроение, 1974. 336 с.

⁸ Мартынюк А. А., Гутовски Р. [Интегральные неравенства и устойчивость движения](#). Киев : Наукова думка, 1979. 270 с.



норма вектора – евклидова, верхний индекс T означает транспонирование.

Кроме системы (1), будем рассматривать также систему

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t, \tilde{x}) + R(t, \tilde{x}), R(t, 0) \neq 0, (3)$$

где векторные функции $R(t, \tilde{x})$ являются постоянно действующими возмущениями. Постоянно действующие возмущения будем считать заданными в области (2) и удовлетворяющими тем же условиям, что и $f(t, x)$.

При постоянно действующих возмущениях $R(t, \tilde{x})$ точно неизвестны⁹. Как уже отмечено, $R(t, 0) \neq 0$. Будем считать их достаточно малыми, т. е. $R(t, x) \leq \gamma$, где $\gamma > 0$ является достаточно малой величиной.

Определение 1

Нулевое решение $x = 0$ системы (1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$ существуют числа $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $R(t, \tilde{x}) \leq \gamma$ для любых начальных данных $\|x_0\| < \delta$ выполняется неравенство $\|\tilde{x}(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0 \geq 0$. Здесь $\tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_0)$ – произвольное решение системы (3), $(t_0, \tilde{x}_0) \in \Omega$; величина $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малой¹⁰.

Теорема 1

Пусть для системы (1) существует определенно-положительная функция $V(t, x)$, допускающая бесконечно малый высший предел, полная производная которой по времени t вдоль решений системы (1) есть определенно-отрицательная функция, и если в области (2) $\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq N$, $0 < N = \text{const}$, то нулевое решение системы (1) является

устойчивым при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Данная теорема с доказательством содержится в монографиях И. Г. Малкина и В. И. Зубова¹¹⁻¹².

Приведем далее определение устойчивости положения равновесия $x = 0$ системы (1) при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных.

Введем обозначение $x = (y^T, z^T)^T$. Здесь $y = (x_1, \dots, x_k)^T$, $z = (x_{k+1}, \dots, x_n)^T$

Определение 2

Нулевое решение системы (1) $x = 0$ у-устойчиво¹³ при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, если для любого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$ существуют $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что всякое решение $\tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_0)$ и $\|\tilde{x}_0\| < \delta$ системы (3) удовлетворяет неравенству $\|\tilde{x}(t, t_0, \tilde{x}_0)\| < \varepsilon$ при любом $t \geq t_0$ и достаточно малом $\gamma > 0$, где $R(t, \tilde{x}) < \gamma$.

В этом определении речь идет об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно переменных y_1, \dots, y_k .

Теорема 2

Пусть для системы (1) существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям¹⁴:

$$a(\|y\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|),$$

$$\left. \frac{dV(t, x)}{dt} \right|_{(1)} \leq -c(\|x\|),$$

где $a(\|y\|)$, $b(\|x\|)$ и $c(\|x\|)$ – непрерывные положительные возрастающие функции, причем $a(\|y\|) \rightarrow \infty$ при $\|y\| \rightarrow \infty$.

⁹ Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения*. М.: Наука, 1966. 530 с.

¹⁰ Зубов В. И. *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*. – 2-е изд. Л.: Машиностроение, 1974. С. 176–177.

¹¹ Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения*. М.: Наука, 1966. С. 302.

¹² Зубов В. И. *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*. – 2-е изд. Л.: Машиностроение, 1974. С. 176–177.

¹³ Румянцев В. В., Озиранер А. С. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*. М.: Наука, 1987. С. 193.

¹⁴ Там же.

Предположим далее, что система (1) представима в виде

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t, y), \quad (4_1)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(t, y, z), \quad (4_2)$$

а система (3) в виде

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = f_1(t, \tilde{y}) + r_1(t, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (5_1)$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = f_2(t, \tilde{y}, \tilde{z}) + r_2(t, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (5_2)$$

Будем считать, что

$$f_1(t, 0) = 0, \quad r_1(t, 0, z) \neq 0,$$

$$r_1(t, \tilde{y}, \tilde{z}) \leq \tilde{\gamma}, \quad 0 < \tilde{\gamma} = \text{const}.$$

Введем обозначение

$$y = \left(y^{(1)T}, y^{(2)T} \right)^T,$$

$$y^{(1)} = (y_1, \dots, y_l), \quad y^{(2)} = (y_{l+1}, \dots, y_k).$$

Областью определения систем (4₁–4₂; 5₁–5₂) примем

$$\Omega_1 = \{t, y^{(1)}, y^{(2)}, z : t \geq t_0 \geq 0,$$

$$\|y^{(1)}\| \leq H, \|y^{(2)}\| < \infty, \|z\| < \infty\}.$$

При этом также предполагается, что в области Ω_1 правые части систем (4₁–4₂; 5₁–5₂) непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решений задач Коши.

Далее в системе (4₁–4₂) будем считать, что $y = 0$ является «частичным» положением равновесия, т. е. $(0^T, z^T)^T$ – «частичное» положение равновесия системы (4₁–4₂) с наблюдаемой (контролируемой) частью начальных условий $y^{(1)}(t_0) = (y_1(t_0), \dots, y_l(t_0))^T$.

Докажем теорему об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных $y^{(1)} = (y_1, \dots, y_l)^T$ или, короче, об $y^{(1)}$ -устойчивости при постоян-

но действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, с наблюдаемой (контролируемой) частью начальных условий фазовых переменных $y^{(1)}(t_0) = (y_1(t_0), \dots, y_l(t_0))^T$.

Теорема 3

Предположим, что для системы (4₁–4₂) существует функция $v(t, y)$, удовлетворяющая условиям:

$$\bar{a}(\|y^{(1)}\|) \leq v(t, y) \leq \bar{b}(\|y^{(1)}\|), \quad (6)$$

$$\left. \frac{dv(t, y)}{dt} \right|_{(4_1)} \leq -\bar{c}(\|y^{(1)}\|), \quad (7)$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\| \leq \bar{N}, \quad 0 < \bar{N} < \infty, \quad (8)$$

где $\bar{a}(\|y^{(1)}\|)$, $\bar{b}(\|y^{(1)}\|)$ и $\bar{c}(\|y^{(1)}\|)$ – непрерывные положительные возрастающие функции, причем $\bar{a}(\|y^{(1)}\|) \rightarrow \infty$ при $\|y^{(1)}\| \rightarrow \infty$. Тогда нулевое решение систем (4₁–4₂) является $y^{(1)}$ -устойчивым при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, с наблюдаемой частью начальных условий $y_0^{(1)} = (y_1(t_0), \dots, y_l(t_0))$.

Доказательство

Найдем полную производную от функции $v(t, y)$ по времени t на решениях системы (5₁). В результате получим:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(5_1)} = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{(4_1)} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}, r_1(t, \tilde{y}, \tilde{z}) \right). \quad (9)$$

С учетом оценки (8) из равенства (9) получим дифференциальное неравенство

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(5_1)} \leq -K^2 + N\gamma.$$

Выберем γ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(5_1)} \leq -K_1, \quad K_1 > 0, \quad K_1 = -K^2 + N\gamma \quad (10)$$

при $\|y^{(1)}\| \leq H, \|y^{(2)}\| < \infty, \|z\| < \infty$ и достаточно малом $\gamma > 0$. Выберем также про-



извольное положительное число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq H$. При этом допустим, что $\varepsilon > 0$ может быть и достаточно малым. Возьмем далее произвольное решение $\tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)$ системы (5), с $\|\tilde{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$. Здесь $\delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от t_0 , т. к. существуют неравенства (6). Если функция $v(t, \tilde{y}^{(1)})$ является непрерывной и $v(t, 0) = 0$, то найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $v(t_0, \tilde{y}_0) < a(\varepsilon)$. Покажем справедливость неравенства $v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) < a(\varepsilon)$ при $t \geq t_0$. Допустим, что при $t = t_1$ справедливо $v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) = a(\varepsilon)$. Однако тогда в силу (10) получим $v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) < 0$, $v(t_1, \tilde{y}(t_1, t_0, \tilde{y}_0)) = a(\varepsilon)$, что противоречит условию (10). Таким образом, $a(\|\tilde{y}^{(1)}\|) \leq v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) < a(\varepsilon)$. В силу того, что функция $a(\|\tilde{y}^{(1)}\|)$ является непрерывной и возрастающей и, кроме того, $a(\|\tilde{y}^{(1)}\|) \rightarrow \infty$ при $\|\tilde{y}^{(1)}\| \rightarrow \infty$, то для нее существует обратная функция. Следовательно, справедливо неравенство $\|\tilde{y}^{(1)}(t, t_0, \tilde{y}_0)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ и достаточно малых $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\gamma > 0$.

Доказательство завершено.

Примечание. Доказательство теоремы 3 проведено по алгоритму доказательств теорем 1–2, т. е. по алгоритму доказательства теорем И. Г. Малкина,

В. И. Зубова и А. С. Озиранера: 1) определяется область, в которой $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(5_1)} < 0$ на решениях системы (3); 2) с учетом того, что функция $v(t, y^{(1)})$ является определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел, и, кроме того, $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(5_1)} < 0$, проверяется условие $\|y^{(1)}(t, t_0, y_0)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ и достаточно малых $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\gamma > 0$. Если условия 1) и 2) выполняются, то это и означает $y^{(1)}$ -устойчивость «частичного» положения равновесия $y = 0$ системы (4₁–4₂) при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Обсуждение и заключения.

Полученные в данной работе результаты являются развитием теории устойчивости по части фазовых переменных. Достоинством результата является то, что доказанная теорема уникальна, поскольку теорем об устойчивости при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия до сих пор не сформулировано. Доказательство теоремы было проведено по алгоритму доказательства теорем И. Г. Малкина, В. И. Зубова и А. С. Озиранера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений // Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга. 1940. № 114. С. 156–164.
2. Малкин И. Г. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII, № 3. С. 241–245.
3. Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях // Прикладная математика и механика. 1954. № 18. С. 95–102.
4. Тихонов А. А. Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях // Вестник Ленинградского университета. 1965. № 1. С. 95–101.
5. Горшин С. И. Второй метод Ляпунова и применение к устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике : тр. семинара-симпозиума. 1956. Ч. 1. С. 5–34.
6. Strauss A., Yorke A. J. Identifying perturbations which preserved asymptotic stability // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 22, № 2. P. 513–518.
7. Corduneanu C. Sur la stabilite partielle // Rev. Roumaine math. Pures. Appl. 1964. Vol. 9, № 3. P. 229–236. URL: <https://zbmath.org/?q=an:0134.07104>

8. **Воротников В. И.** Два класса задач частичной устойчивости: к унификации понятий и единым условиям разрешимости // Доклады РАН. 2002. Т. 384, № 1. С. 47–51.
9. **Воротников В. И.** Об устойчивости и устойчивости по части переменных частичных положений равновесия нелинейных динамических систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 3. С. 332–337.
10. **Габасов Р.** Об устойчивости решения дифференциально-операторных уравнений при постоянно действующих возмущениях // Известия вузов. Математика. 1962. Т. 30, № 5. С. 29–38. URL: [http://www.mathnet.ru/links/f63cae17d524fd7cd7a5597ffa597ffa597ffafbc68/ivm2096.pdf](http://www.mathnet.ru/links/f63cae17d524fd7cd7a5597ffa597ffafbc68/ivm2096.pdf)
11. **Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 769–775.
12. **Горшин С. И.** О некоторых критериях устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Известия вузов. Математика. 1967. № 11. С. 17–20. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=3231&option_lang=rus
13. **Савченко А. Я.** Об устойчивости движений консервативных механических систем при постоянно действующих возмущениях. Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38, № 2. С. 240–245.

Поступила 18.04.2018; принята к публикации 07.06.2018; опубликована онлайн 20.09.2018

Об авторах:

Липасов Павел Петрович, магистр кафедры фундаментальной информатики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), Researcher ID: N-7266-2018, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9524-7353>, pashka0113@yandex.ru

Щенников Владимир Николаевич, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), доктор физико-математических наук, Researcher ID: //, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5230-3482>, du@math.mrsu.ru

Вклад соавторов:

П. П. Липасов – доказательство теоремы; В. Н. Щенников – постановка задачи, определение методов исследования.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Duboshin G. N. [On the question of the stability of the motion of relatively constant perturbations]. *Tr. Gos. astronom. in-ta im. Shternberga* = Proceedings of Shternberg State Astronomical Institute. 1940; 114:156–164 (In Russ.)
2. Malkin I. G. [On stability under constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = Applied Mathematics and Mechanics. 1944; VIII(3):241–245 (In Russ.)
3. Krasovskiy N. N. [On the stability of motion as a whole with constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = Applied Mathematics and Mechanics. 1954; 18:95–102 (In Russ.)
4. Tikhonov A. A. [On the stability of motion under constantly acting perturbations]. *Vestnik Leningradskogo universiteta* = Leningrad University Bulletin. 1965; 1:95–101 (In Russ.)
5. Gorshin S. I. [The second Lyapunov method and application to stability under constantly acting perturbations]. *Vtoroy metod Lyapunova i ego primenenie v energetike: tr. seminar-simpoziuma* = The second Lyapunov method and its application in power engineering: Proceedings of symposium seminar. 1956; 1:5–34 (In Russ.)



6. Strauss A., Yorke A. J. Identifying perturbations which preserved asymptotic stability. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1969; 22(2):513–518.
7. Corduneanu C. Sur la stabilité partielle. *Rev. Roumaine math. Pures. Appl.* 1964; 9(3):229–236. URL: <https://zbmath.org/?q=an:0134.07104>
8. Vorotnikov V. I. [Two classes of partial stability problems: to the unification of concepts and to unified solvability conditions]. *Doklady RAN = Reports of RAS.* 2002; 384(1):47–51 (In Russ.)
9. Vorotnikov V. I. [On stability and stability with respect to part of variable partial equilibrium positions of nonlinear dynamical systems]. *Doklady RAN = Reports of RAS.* 2003; 389(3):332–337.
10. Gabasov R. [On the stability of the solution of differential-operator equations under constantly acting perturbations]. *Izvestiya vuzov. Matematika = Proceedings of Higher Schools. Mathematics.* 1962; 30(5):29–38. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/f63cae17d524fd7cd7a5597ffa6bcb68/ivm2096.pdf> (In Russ.)
11. Germaidze V. Ye., Krasovskiy N. N. [On stability under constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics.* 1957; 21(6):769–775 (In Russ.)
12. Gorshin S. I. [On some stability criteria for constantly acting perturbations]. *Izvestiya vuzov. Matematika = Proceedings of Higher Schools.* 1967; 11:17–20. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrmid=ivm&paperid=3231&option_lang=rus (In Russ.)
13. Savchenko A. Ya. [On the stability of the motions of conservative mechanical systems under constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics.* 1974; 38(2):240–245 (In Russ.)

Received 18.04.2018; revised 07.06.2018; published online 20.09.2018

About authors:

Pavel P. Lipasov, Master Degree Student of Chair of Fundamental Informatics and Information Technologies, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Researcher ID: N-7266-2018, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9524-7353>, pashka0113@yandex.ru

Vladimir N. Shchennikov, Professor of Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), D. Sc. (Physics and Mathematics), Researcher ID: ///////////////, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5230-3482>, du@math.mrsu.ru

Authors' contribution:

P. P. Lipasov – proof of theorem; V. N. Shchennikov – introduction of the research task, the definition of research methods.

All authors have read and approved the final version of the paper.